Introdução à filosofia matemática

BERTRAND RUSSELL

Introdução à filosofia matemática

Com novo prefácio por Michael Potter

Tradução
Lilian Centurion

Revisão técnica
Cezar A. Mortari

editora unesp

Título original: *Introduction to Mathematical Philosophy*

Direitos de publicação reservados à:
Fundação Editora da Unesp (FEU)
Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171
Fax: (0xx11) 3242-7172
www.editoraunesp.com.br
www.livrariaunesp.com.br
atendimento.editora@unesp.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Elaborado por Vagner Rodolfo da Silva – CRB-8/9410

R961i Russell, Bertrand

Introdução à filosofia matemática / Bertrand Russell; traduzido por Lilian Centurion; revisão técnica de Cezar A. Mortari. – São Paulo: Editora Unesp, 2025.

Tradução de: Introduction to Mathematical Philosophy
Inclui bibliografia.
ISBN: 978-65-5711-256-4

1. Filosofia. 2. Filosofia analítica. 3. Lógica. 4. Descrição. 5. Conjuntos. 6. Matemática. 7. História da matemática. 8. Matemática pura. 9. Filosofia da matemática. 10. Epistemologia. 11. Ciências exatas. 12. Educação. I. Centurion, Lilian. II. Mortari, Cezar A. II. Título.

2025-1500 CDD 100
CDU 1

Editora afiliada:

Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe

Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Sumário

Prefácio a esta edição

Bertrand Russell escreveu *Introdução à filosofia matemática* sob circunstâncias atípicas. Depois de ter passado a maior parte da guerra envolvido numa campanha pacifista (e em consequência ter sido removido do seu cargo de professor no Trinity College, em Cambridge), entre o fim de 1917 e o início de 1918 ele ministrou duas disciplinas com aulas filosóficas populares, uma sobre lógica moderna e outra sobre atomismo lógico. A segunda foi registrada palavra por palavra por um estenógrafo e publicada após muito pouca revisão.[1] Porém, enquanto ele estava ministrando essa disciplina, foi condenado a passar seis meses na Penitenciária Brixton, em Londres, por publicar um material prejudicial às relações da Grã-Bretanha com os seus aliados americanos. A apelação da sentença não foi bem-sucedida, embora o tempo que levou para ela ser examinada de fato tenha lhe permitido completar a segunda disciplina. O mais

1 Como "The Philosophy of Logical Atomism", *The Monist* (1918-1919).

importante, entretanto, foi o fato de ele ter recebido permissão para cumprir a sentença na "primeira divisão", o que significa que foi dispensado de executar trabalhos forçados e podia ter livros na cela. Sua pena começou a ser cumprida em 1º de maio de 1918, e ele resolveu dedicar parte do tempo na prisão a transformar a primeira disciplina no que ele descreveu como "um livro didático sobre o *Principia*" – uma introdução popular ao tratado sobre lógica que ele e o matemático A. N. Whitehead haviam escrito antes da guerra. Houve um certo atraso enquanto se obtinha a permissão para ele ter materiais para escrever na sua cela, que não chegaram até o dia 16 daquele mês. Mas, no dia 21, Russell relatou que tinha escrito em torno de 20 mil palavras, e, no dia 27, o livro de 70 mil palavras estava "quase pronto". Ele deve ter produzido, portanto, uma média de pelo menos 5 mil palavras por dia. Mesmo levando-se em consideração o fato de que estava transcrevendo aulas que já havia ministrado e a ausência de distrações que a prisão lhe proporcionava, trata-se de um ritmo de trabalho impressionante. Como ocorreu com a maioria dos seus escritos que se seguiram ao *Principles*, o manuscrito completo do livro exibe poucas evidências de revisão subsequente.[2]

---

2 Um objetivo secundário do livro sem dúvida foi popularizar a escola de filosofia matemática que, antes da guerra, Russell nutrira a esperança de fundar. "Wittgenstein", ele havia sugerido, "é exatamente o meu sonho". No entanto, Wittgenstein ficou sem entrar em contato com ele durante três anos e poderia, até onde ele sabia, ter morrido (p.286*n*). E embora Russell tivesse então dois alunos promissores (Dorothy Wrinch e Jean Nicod), sem seu cargo de professor em Cambridge, suas perspectivas de atrair mais estudantes à sua causa presumivelmente seriam limitadas.

No século que se passou desde a sua publicação, a *Introdução* apresentou a muitos leitores (entre eles o presente autor, quando estava na faculdade) o projeto logicista de Russell de demonstrar que a matemática é, de alguma maneira, parte da lógica, ou tem uma continuidade com ela. Contudo, o livro muitas vezes deixa transparecer a velocidade com que foi escrito: termos cruciais são deixados sem definição, e raciocínios cruciais, expressos de forma obscura ou nem isso. Para citar apenas um exemplo, ele mantém, sem explicação, o costume confuso, presente na sua obra anterior, segundo o qual chamar uma classe de "existente" significa que ela é não vazia (p.181).

Axiomatização da matemática

Desde o tempo de Euclides, a geometria vem sendo tratada como uma teoria axiomática. Uma das principais preocupações da parte inicial do livro de Russell é delinear como as teorias dos números naturais e reais podem ser igualmente apresentadas de maneira axiomática. Em ambos os casos, porém, Russell não se satisfaz em apenas identificar a base axiomática, mas também tenta uma redução à teoria das classes. Ou seja, ele mostra como construir certas classes que podem atuar como substitutos dos números, porque é possível provar, com uma interpretação adequada, que eles constituem um modelo da teoria axiomática em questão: no caso dos números naturais, os substitutos são classes de classes equipotentes (ou "similares", na terminologia de Russell); no caso dos números reais, os substitutos são os "cortes de Dedekind" dos números racionais (estes, por sua vez, são construídos como classes de equivalência dos números naturais). Russell não deixa dúvidas quanto à importância que atribui a essas construções. Num comentário bastante citado, ele diz que contentar-se com meros axiomas seria aceitar "as vantagens do furto em relação às da labuta honesta" (p.115). Essa atitude, no entanto, é obviamente refém do *status* (ao qual retornaremos mais adiante) das classes a que se recorreu na construção.

Outra preocupação do livro é estender a teoria da contagem a classes infinitas e finitas. Há duas formas de fazer isso, a ordinal e a cardinal, e a escolha entre elas depende do fato de a ordem em que os elementos da classe são arranjados ser considerada relevante ou não. A teoria desses números fora investigada em pormenores por Georg Cantor nas décadas de 1870 e 1880. A tentativa de Russell de atrair maior atenção popular a esse trabalho se deve, pelo menos em parte, ao seu desejo de pôr em xeque os "paradoxos do infinito", que os hegelianos, incluindo o próprio Russell quando mais jovem, usaram para embasar uma concepção segundo a qual os nossos esforços de teorização científica seriam irremediavelmente contraditórios.

Lógica

Russell começa sua descrição da lógica de uma maneira bastante convencional ao discutir a teoria das funções de verdade (cálculo proposicional). Ao formalizar essa teoria, temos, como se sabe, uma escolha de noções primitivas: Frege tinha escolhido a negação e a implicação material; no *Principia*, Russell tinha, em vez disso, usado a negação e a disjunção inclusiva; um lógico americano chamado Henry Sheffer mostrara, em seguida, que um único conectivo, o de incompatibilidade, basta por si só. A maioria dos autores modernos continua a tomar dois conectivos como primitivos e a ver a descoberta de Sheffer apenas como uma curiosidade interessante, mas aqui Russell escolhe, estranhamente, expor a explicação de Sheffer num nível de detalhe que os iniciantes podem muito bem achar árido.

Durante uma boa parte da sua carreira filosófica, Russell foi hostil à ideia de que a noção de modalidade (necessidade e possibilidade) tenha qualquer importância independente, e na *Introdução* ele atribui "confusões irremediáveis" (p.233) a filósofos anteriores que supuseram que ela o teria. Atribuições de necessidade ou de possibilidade a uma proposição são na verdade, insiste ele, afirmações de que uma função proposicional é verdadeira, às vezes ou sempre. No entanto, isso não significa que ele queira dizer, como o querem alguns filósofos modernos, que uma proposição é necessária ou possível se for verdadeira em todos ou em alguns mundos possíveis. A quantificação que ele tem em mente tem o mundo real como domínio. A lógica, opina ele, "não deve aceitar um unicórnio mais do que a zoologia consegue fazê-lo" (p.237).

Russell estende essa hostilidade à lógica modal ao rejeitar rapidamente uma proposta recente do lógico americano C. I. Lewis de adotar a implicação estrita ($\Box(p \rightarrow q)$ no simbolismo moderno) na lógica em vez da implicação material ($p \rightarrow q$). Mas o que Russell diz aqui (p.219-20) é breve demais para chegar a ser uma refutação da proposta de Lewis. Além disso, o que ele escreve sofre da sua falha em distinguir com clareza a questão de se devemos ou não admitir noções modais *no* nosso sistema formal da questão distinta do que é a relação de dedutibilidade *entre* sentenças do nosso sistema. Esse é um exemplo da sua falha mais geral em distinguir (como deveríamos dizer agora) entre linguagem e metalinguagem.

Na sua obra inicial,[3] Russell buscara proporcionar à mente "aquele tipo de familiaridade" com os conceitos indefiníveis da lógica que aquela tem "com a cor vermelha ou com o gosto de abacaxi". Porém, em 1918, ele já tinha abandonado essa visão platônica (induzido, talvez, pelo Wittgenstein pré-guerra) e passado a defender que uma proposição é "primordialmente um arranjo de palavras" e que uma função proposicional é "uma expressão que contém um ou mais componentes indeterminados" (p.222). Isso o levou, nos anos seguintes, a defender (numa atitude incomum para um filósofo analítico) que o envolvimento das palavras e dos seus análogos mentais torna a lógica parcialmente psicológica.

A concepção de Russell dos quantificadores é frustrada pela sua falha em explicar a noção de escopo. Na sua concepção, o propósito de uma variável é puramente expressar generalidade. Frege, ao contrário, havia enfatizado o papel dela na ligação entre um lugar de argumento e um quantificador e, portanto, na determinação do seu escopo. Hoje em dia, dizemos que a variável é "ligada" pelo quantificador relevante. Russell, por outro lado, dizia que a variável era "aparente", mas subestimava tanto essa noção que até se esqueceu (p.227-8) de fornecer qualquer definição para tal termo.

Descrições

A teoria das descrições de Russell, proposta pela primeira vez no seu artigo de 1905 intitulado "On Denoting" [Sobre denotar], é a sua mais celebrada contribuição à lógica. (Ramsey a chamou

3 Russell, "Preface", em *Principles of Mathematics*.

de "um paradigma da filosofia".) Alunos de graduação que estejam estudando a teoria pela primeira vez costumam ser encorajados a ler não o artigo de 1905, e sim a exposição mais popular que Russell apresenta aqui, no Capítulo 16. Essa exposição, pelo menos, evita de fato as complexidades do seu complicado "Gray's Elegy Argument" [O argumento da Elegia de Gray] (cujo objetivo foi refutar uma teoria anterior que ele tinha avançado no seu *Principles of Mathematics*), mas os argumentos a favor da sua teoria de 1905 que ele oferece aqui são falhos.

Considere, primeiro, descrições indefinidas como "um homem", como ocorre em "conheci um homem". Russell espera convencer o leitor de que a expressão não oferece nenhuma contribuição particular ao significado da proposição como um todo. Ele pressupõe, sem apresentar argumentos, que o "significado" que procura é uma entidade mundana: não diz nada sobre a proposta de Frege de que os significados ("sentidos" na terminologia de Frege) são direcionados para o mundo, mas não são realmente parte dele. Uma vez que a explicação de Frege é descartada, entretanto, a afirmação de Russell de que "um homem" não tem significado ("referência" na terminologia de Frege) tem sido amplamente considerada correta. Um "homem arbitrário" misterioso, além do homem que de fato conheci, existe tanto quanto uma "família média" com 2,4 filhos.

Russell então passa a aplicar a mesma higiene metafísica, numa tentativa de persuadir o leitor de que descrições definidas como "o autor de Waverley" ou "o atual rei da França", igualmente, não têm referência removível de seus contextos proposicionais. Não há um atual rei da França misterioso e inexistente, não mais do que há uma família média. Para estabelecer isso, Russell nos pede para considerar a sentença "Scott é o autor de *Waverley*". Ele alega que essa é "uma proposição diferente" (p.244) de "Scott é Scott". Ele evidentemente já se esqueceu da sua decisão anterior de usar "proposição" para o arranjo de palavras e voltou a usar o termo para aquilo que o arranjo de palavras expressa. Ou seja, o que ele tem em mente não é a observação trivial de que essas são sentenças distintas, e sim a observação mais controversa de que elas dizem coisas diferentes. O motivo que apresenta para isso é que a primeira sentença expressa "um fato da história literária", e a segunda, "um truísmo banal". Ele não explica por que tal diferença é suficiente para mostrar que estão envolvidas duas proposições distintas, em vez de, digamos, duas atitudes cognitivas ou epistêmicas para com uma única proposição.

A dificuldade é ilustrada comparando-se "Scott é o autor de *Waverley*" com "Scott é Sir Walter". Russell explica que esta nos diz algo não trivial apenas se for compreendida (como deveríamos dizer nos dias de hoje) metalinguisticamente, isto é, significando de fato que "a pessoa chamada 'Scott' é a pessoa chamada 'Sir Walter'". Se o significado não for esse, declara ele, então ela realmente diz o mesmo que "Scott é Scott". O que Russell deveria ter dito nessa altura é o que de fato diz algumas páginas depois, a saber, que sua teoria implica que quase todos os nomes na linguagem comum não são, de forma alguma, nomes no sentido estrito, e sim descrições disfarçadas. Ele expressa essa ideia nas p.248-50 em relação a qualquer nome "*a*" para o qual a sentença "*a* existe" faça sentido, mas o mesmo se aplica a qualquer caso em que "$a = b$" seja não trivial. Ou seja, em sua concepção, os nomes, no sentido estrito, podem ser aplicados apenas a entidades (como os dados sensoriais) com as quais nosso contato epistêmico é tão direto que é impossível surgir alguma dúvida de forma inteligível quanto à existência ou à identidade delas.

Por que deveríamos aceitar uma teoria que leva a essa conclusão implausível? O argumento de Russell depende do fato de compartilharmos as intuições dele em relação a quando duas proposições "dizem o mesmo". As falhas na sua exposição remontam à nossa observação anterior de que, em sua concepção de quantificação, ele não tinha conseguido enfatizar o papel do quantificador no fornecimento de um escopo para a variável aparente. Na sua exposição de 1905, o exemplo que ele discutiu não foi "Scott é o autor de *Waverley*", e sim "George IV gostaria de saber se Scott era o autor de *Waverley*". No segundo caso, mas não no primeiro, a descrição definida ocorre dentro do escopo de uma atribuição de atitude proposicional. O argumento que Russell dera em 1905 a favor de tratar a descrição de forma quantificacional foi que só assim pode-se articular a distinção entre dois escopos diferentes que ela possa ter em relação à atitude proposicional. A distinção entre termos referenciais e não referenciais foi, portanto, entre expressões que têm um valor semântico único e sem escopo e aquelas cujo valor semântico depende do contexto.

Classes e redutibilidade

Como já foi mencionado, Russell torna as teorias dos números naturais e reais parasitas da teoria das classes. Na parte derradeira do livro, volta a sua atenção a essa última. A principal dificuldade aqui se origina do paradoxo da classe de todas aquelas classes que não pertencem a si mesmas – uma classe que, de maneira absurda, pertence a si própria se e somente se não pertencer.[4] Russell diz na Introdução que vai evitar o máximo possível a controvérsia e afirmar somente o que é amplamente consensual. Existe, de fato, um amplo consenso entre os lógicos de que o paradoxo nos obriga a estabelecer uma espécie de distinção de tipo entre as classes; mas Russell passa a afirmar – sem que seja um consenso universal – que classes são ficções lógicas que devem ser eliminadas essencialmente da mesma forma que o atual rei da França e o homem médio foram eliminados.[5]

O método de redução que Russell propõe (p.268-9) é que qualquer afirmação que aparentemente atribua uma propriedade f a uma classe $\{x : \varphi x\}$ deveria ser reinterpretada como sendo a que sustenta que alguma função proposicional formalmente equivalente a φx tem a propriedade f. Logo, quantificações aplicadas a classes são reinterpretadas como quantificações aplicadas a funções proposicionais. Uma das dificuldades que resultam disso é que, se estas não passam de arranjos de palavras, não está claro o que significa quantificá-las. Uma dificuldade mais premente diz respeito à teoria dos tipos necessária para evitar os paradoxos. Embora Russell não explique a questão aqui, o paradoxo dele não depende da natureza extensional das classes e pode ser reformulado para tratar de funções proposicionais. Isso leva ao que agora é chamado de "teoria simples de tipos" – a doutrina segundo a qual as funções proposicionais são particionadas em "tipos lógicos" em conformidade com os tipos das suas variáveis *reais* (isto é, livres), e segundo a qual nenhuma

4 O paradoxo não depende, como a exposição do próprio Russell da questão talvez sugira, da lei do terceiro excluído.

5 Russell afirma que as classes são "símbolos incompletos", mas essa é uma confusão uso-menção: o que ele quer dizer é que os *termos* das classes são símbolos incompletos e que as *classes* são ficções lógicas.

variável varia sobre mais de um tipo. Russell, entretanto, dá um passo adicional e mais controverso: restringir ainda mais (ou "ramificar") as variáveis em "ordens" de acordo com os tipos das suas variáveis *aparentes* também. O que ele não faz é apresentar um argumento convincente em defesa dessa ramificação. Ele observa, sem dúvida de forma correta, que, se definirmos o francês típico como aquele que possui todas as qualidades que tem a maioria dos franceses, então seria melhor a "tipicidade" não ser uma das qualidades assim quantificadas. Mas tal observação não contribui em nada para estabelecer a ilegitimidade em geral de aplicar a quantificação a um domínio que inclui funções proposicionais de ordens diferentes. Essa questão tem certa importância para o projeto de Russell como um todo, já que, no contexto de uma teoria dos tipos ramificada, deve haver axiomas explícitos (chamados por Russell de "axiomas de redutibilidade") assegurando a existência das funções proposicionais extensionais necessárias. (Ele já tinha observado, num capítulo anterior, a exigência adicional de um axioma do infinito.)

Já mencionei que o tratamento que Russell deu às classes, considerando-as ficções lógicas, não é, de maneira alguma, aceito universalmente. O caminho alternativo, seguido por Zermelo e desenvolvido por muitos lógicos que vieram depois dele, usa uma lógica não tipada (de primeira ordem) e se concentra em fornecer axiomas de existência de classes. Nesse cenário, o papel dos axiomas de Russell da redutibilidade e do infinito é desempenhado pelo axioma da separação, junto com axiomas que garantem a existência de níveis sucessivos na hierarquia dos tipos de classe. Em qualquer um dos dois cenários, então, a questão central é se há algum motivo para pensar que esses axiomas adicionais de existência são verdades lógicas. Russell agora acha que não. Há, diz ele, mundos possíveis nos quais existe apenas uma quantidade finita de indivíduos: nesses mundos, o axioma do infinito é falso. E há mundos possíveis nos quais dois indivíduos podem ser indistinguíveis: nesses mundos, o axioma da redutibilidade é falso.

Qualquer um que tenha levado a sério a insistência anterior de Russell na ideia de que a modalidade deveria ser compreendida em termos da quantificação sobre o mundo real será surpreendido pelo uso que ele está preparado para fazer aqui de mundos possíveis. Contudo, se ele estiver correto sobre o fato de os axiomas de existência de que depende a matemática serem contingentes, isso evidentemente enfraquece seu logicismo de forma bastante significativa. O lógico deveria, diz ele (p.268), preservar uma certa "altivez" – uma indiferença em relação às contingências do mundo possível no qual calhamos de estar. O matemático, como agora parece, não pode ser tão altivo.

Mesmo assim, Russell continua a afirmar (p.272) que a matemática e a lógica são uma coisa só, mas oferece a favor dessa alegação apenas o argumento pobre de que é impossível identificar o ponto em que termina a lógica e começa a matemática. (Compare: não há um ponto identificável no qual termina a adolescência e começa a vida adulta, mas isso, por si só, não transforma meninos em homens.) O argumento de Russell parece especialmente fraco no presente contexto, já que ele chega perto de propor o critério exato para distinguir a lógica da matemática que ele diz não existir, a saber: que a lógica não deveria se preocupar com afirmações incondicionais de existência. (É por isso que ele vê como "um defeito na pureza lógica" o fato de a lógica do *Principia* implicar a existência de pelo menos um indivíduo.) O que acabamos de ver é que são justamente essas afirmações de existência que a matemática clássica exige. A não ser que se diga algo a mais que justifique essas afirmações, a concepção de Russell parecerá tão culpada de furto quanto o tratamento axiomático que ele criticara antes.

Isso, sem dúvida, significa uma limitação no logicismo de Russell, mas não torna todo o seu programa sem valor. Mais apropriadamente, a "labuta honesta" de reduzir as teorias matemáticas (a aritmética, o cálculo, a teoria dos ordinais infinitos etc.) à teoria das classes nos permite expressar os compromissos ontológicos dessas teorias em termos do número de níveis na hierarquia dos tipos que as suas reduções exigem. Em vez de afirmar, de modo tendencioso, que a matemática e a lógica são uma coisa só, a verdadeira conclusão a que Russell deveria ter chegado na sua *Introdução* (e pela qual seu trabalho na lógica matemática merece ser lembrado) é que a lógica (mais especificamente, a teoria dos tipos) proporciona uma escala comum com que as afirmações existenciais de qualquer teoria matemática podem ser medidas. Defender que a lógica pode, por si só, validar essas afirmações exigiria uma concepção de lógica bastante diferente da que Russell apresenta aqui.

Michael Potter, março de 2022

Referências bibliográficas

RUSSELL, B. The Philosophy of Logical Atomism. *The Monist*, v.29, n.1, p.32-63, 1919.

______. The Philosophy of Logical Atomism. *The Monist*, v.29, n.2, p.190-222, 1919.

RUSSELL, B. The Philosophy of Logical Atomism. *The Monist*, v.29, n.3, p.345-80, 1919.

_______. The Philosophy of Logical Atomism. *The Monist*, v.28, n.4, p.495-527, 1918.

_______. On Denoting. *Mind*, New Series, v.14, n.56, p.479-93, 1905.

_______. *The Principles of Mathematics*. v.1 Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. 3v. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.