"linha", que não especifica a variável independente de maneira explícita. Em geral somos capazes de dizer, a partir da própria equação ou do contexto no qual ela surge, se devemos interpretar y' como dy/dx ou como dy/dt.

Soluções de equações diferenciais

Uma função $y = y(x)$ é uma ***solução*** de uma equação diferencial em um intervalo aberto se a equação estiver satisfeita identicamente no intervalo quando y e suas derivadas forem substituídas na equação. Por exemplo, $y = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \tag{1}$$

no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois substituindo y e as suas derivadas no lado esquerdo dessa equação obtemos

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[e^{2x}] - e^{2x} = 2e^{2x} - e^{2x} = e^{2x}$$

com qualquer valor real de x. Porém, essa não é a única solução em $(-\infty, +\infty)$; por exemplo, a função

$$y = e^{2x} + Ce^{x} \tag{2}$$

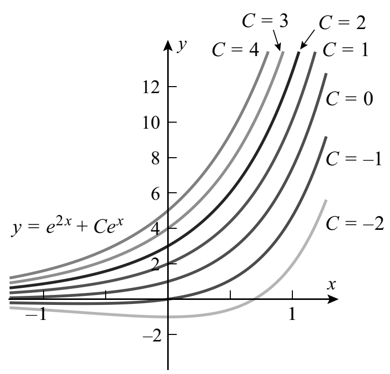
também é uma solução com qualquer valor real da constante C, pois

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[e^{2x} + Ce^{x}] - (e^{2x} + Ce^{x}) = (2e^{2x} + Ce^{x}) - (e^{2x} + Ce^{x}) = e^{2x}$$

Depois de desenvolver algumas técnicas de resolução de equações como a dada em (1), poderemos mostrar que *todas* as soluções de (1) em $(-\infty, +\infty)$ podem ser obtidas substituindo a constante C em (2) por valores. Em um dado intervalo, uma solução de uma equação diferencial a partir da qual podem ser deduzidas todas as soluções naquele intervalo, pela substituição de constantes arbitrárias por valores, é chamada de ***solução geral*** da equação no intervalo. Assim, (2) é a solução geral de (1) no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

A solução geral (2) da equação de primeira ordem (1) tem uma única constante arbitrária. Mais geralmente, a solução geral de uma equação diferencial de enésima ordem tem n constantes arbitrárias. Isso é plausível, pois são necessárias n integrações para recuperar uma função a partir de sua enésima derivada.

O gráfico de uma solução de uma equação diferencial é chamado de ***curva integral*** da equação, portanto a solução geral de uma equação diferencial produz uma família de curvas integrais correspondentes a diferentes possíveis escolhas para as constantes arbitrárias. Por exemplo, a **Figura 8.1.1** mostra algumas curvas integrais de (1), que foram obtidas atribuindo-se valores para a constante arbitrária de (2).



Curvas integrais de $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$

Figura 8.1.1

Problemas de valor inicial

Quando um problema aplicado leva a uma equação diferencial, em geral há condições no problema que determinam valores específicos para as constantes arbitrárias. Como regra empírica, necessitamos de n condições para determinar os valores de todas as n constantes arbitrárias na solução geral de uma equação diferencial de ordem n (uma condição para cada constante). Para uma equação de primeira ordem, a única constante arbitrária pode ser determinada especificando-se o valor da função desconhecida $y(x)$ em um ponto arbitrário x_0, digamos $y(x_0) = y_0$. Isso é chamado de ***condição inicial***, e o problema de resolver uma equação de primeira ordem sujeita a uma condição inicial é chamado de ***problema de valor inicial de primeira ordem***. Geometricamente, a condição inicial $y(x_0) = y_0$ tem o efeito de isolar da família completa de curvas integrais a curva integral que passa pelo ponto (x_0, y_0).

▶ **Exemplo 1** A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}, \quad y(0) = 3$$

pode ser obtida pela substituição da condição inicial $x = 0$, $y = 3$ na solução geral (2) para encontrar C. Obtemos

$$3 = e^0 + Ce^0 = 1 + C$$

Assim, $C = 2$, e a solução do problema de valor inicial, obtida substituindo esse valor de C em (2), é

$$y = e^{2x} + 2e^x$$

Geometricamente, essa solução pode ser vista como a curva integral na Figura 8.1.1 que passa pelo ponto (0, 3). ◀

Como muitos princípios importantes das ciências físicas e sociais envolvem taxas de variação, não deveria ser uma surpresa que tais princípios possam, muitas vezes, ser modelados por equações diferenciais. Vejamos alguns exemplos do processo de modelagem.

■ Crescimento populacional irrestrito

Um dos modelos mais simples de crescimento populacional está baseado na observação de que quando populações (pessoas, plantas, bactérias e moscas-das-frutas, por exemplo) não estão restritas por limitações ambientais, elas tendem a crescer a uma taxa proporcional ao tamanho da população – quanto maior for a população, mais rapidamente ela cresce.

Para traduzir esse princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ denote a população no instante t. A cada momento, a taxa de crescimento populacional em relação ao tempo é dy/dt, portanto a hipótese de que a taxa de crescimento seja proporcional à população é descrita pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{3}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que pode ser usualmente determinada experimentalmente. Assim, se a população for conhecida em algum instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para a população $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

© AndreasReh/iStockphoto

Um modelo de crescimento populacional irrestrito pode ser usado para modelar o aumento de bactérias em uma placa de Petri se o número inicial de bactérias for pequeno.

■ Crescimento populacional restrito; modelos logísticos

A premissa básica do modelo de crescimento populacional irrestrito é a de que a população $y = y(t)$ não é condicionada pelo meio ambiente. Essa hipótese até é razoável enquanto o tamanho da população for relativamente pequeno, mas os efeitos ambientais se tornam cada vez mais importantes à medida que a população cresce. Em geral, as populações crescem dentro de sistemas ecológicos que podem suportar somente um certo número de indivíduos; o número L desses indivíduos é denominado ***capacidade de tolerância*** do sistema. Quando $y > L$, a população excede a capacidade do sistema ecológico e tende a decrescer em direção a L; quando $y < L$, a população está abaixo da capacidade do sistema ecológico e tende a crescer em direção a L; quando $y = L$, a população está em equilíbrio com a capacidade do sistema ecológico e tende a permanecer estável.

Para traduzir isso em um modelo matemático, devemos procurar uma equação diferencial na qual $y > 0$, $L > 0$ e

$$\frac{dy}{dt} < 0 \ \text{ se } \ \frac{y}{L} > 1, \qquad \frac{dy}{dt} > 0 \ \text{ se } \ \frac{y}{L} < 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \ \text{ se } \ \frac{y}{L} = 1$$

Além disso, quando a população estiver muito abaixo da capacidade de tolerância (ou seja, se $y/L \approx 0$), então as restrições do meio ambiente deveriam ter pouco efeito e a taxa de crescimento deveria se comportar como no modelo de crescimento irrestrito. Assim, queremos que

$$\frac{dy}{dt} \approx ky \quad \text{se} \quad \frac{y}{L} \approx 0$$

Uma equação diferencial simples que dá conta de todas essas exigências é

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y$$

em que k é uma constate positiva de proporcionalidade. Assim, se k e L puderem ser determinados experimentalmente e se a população for conhecida em algum ponto, digamos, $y(0) = y_0$, então uma fórmula para a população $y(t)$ pode ser determinada resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad y(0) = y_0 \tag{4}$$

Deve-se tal teoria do crescimento populacional ao matemático belga P. F. Verhulst (1804-1849), que a introduziu em 1838 e a descreveu como "crescimento logístico"*. Assim, a equação diferencial (4) é denominada ***equação diferencial logística***, e o modelo de crescimento descrito por (4) é denominado ***modelo logístico***.

Farmacologia

Quando uma droga (digamos, penicilina ou aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sanguínea e, então, é absorvida pelo corpo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga presente nessa corrente tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente – quanto mais droga estiver presente na corrente sanguínea, mais rapidamente ela será absorvida pelo corpo.

Para traduzir este princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante t. A cada instante, a taxa de variação de y em relação a t é dy/dt, portanto, a hipótese de que o decrescimento da taxa seja proporcional à quantidade y na corrente sanguínea traduz-se na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{5}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da droga e pode ser determinada experimentalmente. O sinal negativo é requerido, pois y decresce com o tempo. Assim, se a dosagem inicial da droga for conhecida, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor incial

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(0) = y_0$$

Disseminação de uma doença

Suponha que uma doença comece a se espalhar em uma população de L indivíduos. A lógica sugere que, em cada instante, a taxa segundo a qual a doença se espalha irá depender de quantos indivíduos estão afetados e de quantos não estão – à medida que mais indivíduos estiverem afetados, a oportunidade de disseminação da doença tende a crescer, mas ao mesmo tempo há menos indivíduos que não foram afetados, portanto, a disseminação da doença tende a decrescer. Dessa forma, existem duas influências conflitantes sobre a taxa segundo a qual a doença se espalha.

Para traduzir isso em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja o número de indivíduos que têm a doença no instante t, logo necessariamente o número de indivíduos que não têm a doença no instante t é $L - y$. Quando o valor de y cresce, o valor de $L - y$ decresce, assim as influências

* O modelo de Verhulst caiu na obscuridade por quase um século porque ele não havia oferecido dados de censo em quantidade suficiente para testar sua validade. No entanto, o interesse nesse modelo foi ressuscitado nos anos 1930, quando biólogos tiveram sucesso em sua utilização para descrever o crescimento das populações de moscas-das-frutas e de besouros de farinha. O próprio Verhulst utilizou seu modelo para prever que um limite superior da população da Bélgica seria de aproximadamente 9.400.000. A população da Bélgica em 2021 era de 11.637.000.

conflitantes dos dois valores sobre a taxa de disseminação dy/dt são levadas em conta pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da natureza da doença e dos padrões de comportamento dos indivíduos e pode ser determinada experimentalmente. Assim, se o número de indivíduos afetados for conhecido em um certo instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y), \quad y(0) = y_0 \tag{6}$$

Mostre que o modelo de disseminação de uma doença pode ser visto como um modelo logístico com constante de proporcionalidade kL: basta reescrever (6) de acordo.

Lei do resfriamento de Newton

Se um objeto quente for colocado em um ambiente frio, o objeto resfriará a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente. Analogamente, se um objeto frio for colocado em um ambiente quente, o objeto esquentará a uma taxa que é, novamente, proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente. Juntas, essas duas observações constituem o que é conhecido como a *Lei do Resfriamento de Newton*. (Essa lei já apreceu anteriormente nos exercícios da Seção 2.2 e foi mencionada rapidamente na Seção 5.8.) Para traduzir essa lei em um modelo matemático, suponha que $T = T(t)$ seja a temperatura do objeto em um instante de tempo t e que T_e seja a temperatura do ambiente, que supomos ser constante. Como a taxa de variação dT/dt é proporcional a $T - T_e$, temos

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_e)$$

em que k é uma constate positiva de proporcionalidade. Além disso, como dT/dt é positivo se $T < T_e$ e é negativo se $T > T_e$, o sinal de k deve ser *negativo*. Assim, se a temperatura do objeto for conhecida em algum instante de tempo, digamos, $T = T_0$ no instante $t = 0$, então uma fórmula para a temperatura $T(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_e), \quad T(0) = T_0 \tag{7}$$

Oscilação de molas

Concluímos esta seção com um modelo da Engenharia que leva a uma equação diferencial de segunda ordem.

Considere um bloco de massa m preso a uma extremidade de uma mola horizontal, conforme a **Figura 8.1.2**. Suponha que o bloco seja colocado em movimento oscilatório puxando a mola além de sua posição natural e soltando-a no instante de tempo $t = 0$. Estaremos interessados em encontrar um modelo matemático que descreva o movimento oscilatório do bloco no decorrer do tempo.

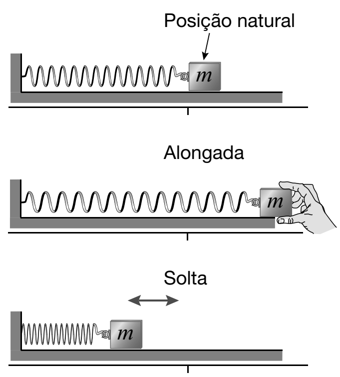


Figura 8.1.2

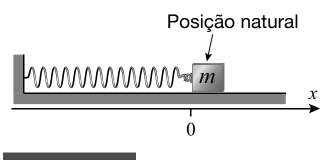


Figura 8.1.3

Para traduzir esse problema em forma matemática, introduzimos um eixo horizontal x cujo sentido positivo seja para a direita e cuja origem esteja na extremidade direita da mola quando a mola estiver na posição natural (**Figura 8.1.3**). Nossa meta é encontrar a coordenada $x = x(t)$ do ponto em que o bloco está preso à mola como uma função do tempo. No desenvolvimento desse modelo, suporemos que a única força que age sobre a massa m é a força restauradora da mola e ignoraremos a influência de outras forças, como a do atrito e a da resistência do ar, e assim por diante. Lembre que, pela Lei de Hooke (Seção 6.6), quando o ponto de conexão tiver a coordenada $x(t)$, a força restauradora será $-kx(t)$, em que k é uma constante da mola. [O sinal é negativo porque a força restauradora atua para a esquerda quando $x(t)$ for positivo e atua para a direita quando $x(t)$ for negativo.] Segue da Segunda Lei do Movimento de Newton [Equação (5) da Seção 6.6] que essa força restauradora é igual ao produto da massa m pela aceleração d^2x/dt^2 da massa. Em outras palavras, temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem em x. Se a mola for solta de sua posição natural $x(0) = x_0$ no instante $t = 0$, então uma fórmula para $x(t)$ pode ser encontrada resolvendo o problema de valor inicial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \tag{8}$$

[Se a mola for solta de sua posição natural com uma velocidade inicial $v_0 \neq 0$ no instante $t = 0$, então a condição $x'(0) = 0$ deve ser trocada por $x'(0) = v_0$.]

8.1 | Exercícios de compreensão (*Ver página 477 para respostas.*)

1. Associe cada equação diferencial com sua família de soluções.
   a. $x\dfrac{dy}{dx} = y$ ______ i. $y = x^2 + C$
   b. $y'' = 4y$ ______ ii. $y = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x$
   c. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ ______ iii. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$
   d. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4y$ ______ iv. $y = Cx$
2. Se $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ é a solução geral de uma equação diferencial, então a ordem da equação é __________ e a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ é dada por $y =$ __________.
3. O gráfico de uma função diferenciável $y = y(x)$ passa pelo ponto (0, 1) e em cada ponto $P(x, y)$ do gráfico a reta tangente é perpendicular à reta que passa por P e pela origem. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(x)$.
4. Um copo de água gelada a uma temperatura de 36°F é colocado em uma sala com uma temperatura ambiente constante de 68°F. Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, encontre um problema de valor inicial cuja solução seja a temperatura da água t minutos depois de ter sido colocada na sala. [*Nota*: A equação diferencial irá envolver uma constante de proporcionalidade.]

Exercícios 8.1

1. Confirme que $y = 3e^{x^3}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 3x^2y$, $y(0) = 3$.
2. Confirme que $y = \frac{1}{4}x^4 + 2\cos x + 1$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = x^3 - 2 \text{ sen } x$, $y(0) = 3$.

3-4 Dê a ordem da equação diferencial e confirme que as funções da família dada são soluções. ■

3. a. $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} = y$; $y = c(1 + x)$
   b. $y'' + y = 0$; $y = c_1 \text{ sen } t + c_2 \cos t$
4. a. $3\dfrac{dy}{dx} + y = x + 1$; $y = ce^{-x/3} + x - 2$
   b. $y'' - y = 0$; $y = c_1e^t + c_2e^{-t}$

5-8 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

5. A equação
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx} + 2y$$
é um exemplo de equação diferencial de segunda ordem.
6. A equação diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 2y + 1$$
tem uma solução que é constante.
7. A solução geral da equação diferencial
$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$
envolve três constantes arbitrárias.
8. Se cada solução de uma equação diferencial puder ser expressa na forma $y = Ae^{x+b}$ com alguma escolha de constantes A e b, então a equação diferencial deve ser de segunda ordem.

9-14 Em cada parte, verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial substituindo as funções na equação. ■

9. $y'' + y' - 2y = 0$
   a. e^{-2x} e e^x
   b. $c_1e^{-2x} + c_2e^x$ (c_1, c_2 constantes)
10. $y'' - y' - 6y = 0$
    a. e^{-2x} e e^{3x}
    b. $c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ (c_1, c_2 constantes)
11. $y'' - 4y' + 4y = 0$
    a. e^{2x} e xe^{2x}
    b. $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ (c_1, c_2 constantes)
12. $y'' - 8y' + 16y = 0$
    a. e^{4x} e xe^{4x}
    b. $c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}$ (c_1, c_2 constantes)
13. $y'' + 9y = 0$
    a. sen $3x$ e cos $3x$
    b. $c_1 \text{ sen } 3x + c_2 \cos 3x$ (c_1, c_2 constantes)
14. $y'' + 4y' + 13y = 0$
    a. $e^{-2x} \text{ sen } 3x$ e $e^{-2x} \cos 3x$
    b. $e^{-2x}(c_1 \text{ sen } 3x + c_2 \cos 3x)$ (c_1, c_2 constantes)

15-20 Use os resultados dos Exercícios 9 a 14 para encontrar uma solução do problema de valor inicial. ■

15. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$
16. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$
17. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
18. $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
19. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$
20. $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 13$

21-26 Encontre uma solução do problema de valor inicial. ■

21. $y' + 4x = 2$, $y(0) = 3$
22. $y'' + 6x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
23. $y' - y^2 = 0$, $y(1) = 3$ [*Sugestão*: suponha que a solução tenha uma função inversa $x = x(y)$. Encontre e resolva a equação diferencial que envolve $x'(y)$.]
24. $y' = 1 + 4y^2$, $y(0) = 0$ (Ver Exercício 23.)

25. $x^2y' + 2xy = 0, \quad y(1) = 2$ [*Sugestão*: interprete o lado esquerdo da equação como a derivada de um produto de duas funções.]

26. $xy' - y = 2x^3, \ y(1) = 3$ [*Sugestão*: divida os dois lados da equação diferencial por x^2 e então utilize o método do Exercício 25.]

Enfocando conceitos

27. a. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ cresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja y_0. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

b. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ decresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja y_0. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

28. a. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = k\sqrt{y}$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de y.

b. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = -ky^3$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de y.

29. Suponha que $s = s(t)$ seja a função posição de um corpo em movimento retilíneo e que a velocidade desse corpo seja sempre positiva.

a. Explique por que a velocidade v e a aceleração a podem ser expressas como funções de s.

b. Mostre que $v\dfrac{dv}{ds} = a$.

30. Um carro em movimento retilíneo acelera de 0 a 60 mi/h em 16 segundos. Dado qualquer valor de $0 < t \leq 16$, a velocidade média do carro nos primeiros t segundos de movimento é 25% da velocidade final do carro naquele intervalo de tempo.

a. Mostre que a velocidade $v(t)$ do carro satisfaz a equação diferencial $t\dfrac{dv}{dt} = 3v$.

b. Encontre uma equação diferencial cuja solução seja a posição $s(t)$ do carro.

31. Considere uma solução $y = y(t)$ do modelo de crescimento populacional irrestrito.

a. Use a Equação (3) para explicar por que y será uma função crescente de t.

b. Use a Equação (3) para explicar por que o gráfico de $y = y(t)$ será côncavo para cima.

32. Considere o modelo de crescimento populacional logístico.

a. Explique por que esse modelo tem duas soluções constantes.

b. Com qual tamanho a população crescerá mais rapidamente?

33. Considere o modelo de disseminação de uma doença.

a. Explique por que esse modelo tem duas soluções constantes.

b. Com qual tamanho da população infectada a disseminação da doença crescerá mais rapidamente?

34. Explique por que existe exatamente uma solução constante do modelo da Lei do Resfriamento de Newton.

35. Mostre que se c_1 e c_2 forem quaisquer constantes, a função

$$x = x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

será uma solução da equação diferencial da oscilação de uma mola. (O movimento correspondente da mola é conhecido como ***movimento harmônico simples***.)

36. a. Use o resultado do Exercício 35 para resolver o problema de valor inicial em (8).

b. Encontre a amplitude, o período e a frequência da resposta dada no item (a) e interprete cada um deles em termos do movimento da mola.

37. Texto Selecione um dos modelos desta seção e escreva um parágrafo discutindo as condições diante das quais esse modelo não seria apropriado. Como o modelo poderia ser modificado para levar em consideração essas condições?

8.1 | Respostas dos exercícios de compreensão

1. a. (iv) **b.** (iii) **c.** (i) **d.** (ii) **2.** 2; $e^{2x} + 2xe^{2x}$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y},\ y(0) = 1$ **4.** $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 68),\ T(0) = 36$

8.2 Separação de variáveis

Nesta seção, discutiremos um método denominado "separação de variáveis", que pode ser usado para resolver uma classe grande de equações diferenciais de primeira ordem de um certo formato. Utilizaremos esse método para investigar os modelos matemáticos para o crescimento e o decaimento exponenciais, inclusive modelos populacionais e a datação por carbono.

■ Equações de primeira ordem separáveis

Veremos agora um método de resolução que pode, muitas vezes, ser aplicado a equações de primeira ordem que possam ser expressas da forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

Alguns autores definem uma equação separável como uma que pode ser escrita no formato $dy/dx = G(x)H(y)$. Explique por que isso equivale à nossa definição.

Tais equações de primeira ordem são denominadas ***separáveis***. Alguns exemplos de equações separáveis são dadas na **Tabela 8.2.1**. A terminologia decorre da possibilidade de reescrever essas equações no formato

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{2}$$

em que as expressões envolvendo x aparecem de um lado e as envolvendo y, do outro lado da equação. O processo de reescrever (1) no formato (2) é denominado ***separar as variáveis***.

Tabela 8.2.1

Equação	Formato (1)	$h(y)$	$g(x)$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$	$y\dfrac{dy}{dx} = x$	y	x
$\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$	$\dfrac{1}{y^3}\dfrac{dy}{dx} = x^2$	$\dfrac{1}{y^3}$	x^2
$\dfrac{dy}{dx} = y$	$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1$	$\dfrac{1}{y}$	1
$\dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{y}{x}$	$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{y}$	$1 - \dfrac{1}{x}$

Para motivar um método de resolução de equações separáveis, suponha que $h(y)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas de suas respectivas variáveis e considere antiderivadas $H(y)$ e $G(x)$ de $h(y)$ e $g(x)$, respectivamente. Em seguida, integre ambos os lados de (2), o lado esquerdo em relação a y e o lado direito em relação a x. Então, temos

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \tag{3}$$

ou, equivalentemente,

$$H(y) = G(x) + C \tag{4}$$

em que consolidamos as constantes de integração em uma única constante. Afirmamos que uma função diferenciável $y = y(x)$ é uma solução de (1) se, e somente se, y satisfaz a Equação (4) com alguma escolha da constante C.

Suponha que $y = y(x)$ seja uma solução de (1). Então segue da regra da cadeia que

$$\frac{d}{dx}[H(y)] = \frac{dH}{dy}\frac{dy}{dx} = h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) = \frac{dG}{dx} \tag{5}$$

Como as funções $H(y)$ e $G(x)$ têm a mesma derivada em relação a x, elas têm uma diferença constante (Teorema 4.8.3). Desse modo, vemos que y satisfaz (4) com uma escolha apropriada de C. Reciprocamente, se $y = y(x)$ for definida implicitamente pela Equação (4), então a derivação implícita mostra que (5) é válida e, portanto, $y(x)$ é uma solução de (1) (Exercício 71). Em vista disso, é prática comum dizer que a Equação (4) é a "solução" de (1).

Resumindo, temos o procedimento denominado ***separação de variáveis*** a seguir para resolver (1).

Separação de Variáveis

Passo 1 Separe as variáveis em (1) reescrevendo a equação da forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Passo 2 Integre ambos os lados da equação do Passo 1 (o lado esquerdo em relação a y e o lado direito em relação x),

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

e consolide as constantes de integração em uma única constante.

Passo 3 A equação que resulta do Passo 2 será equivalente a

$$H(y) = G(x) + C$$

em que $H(y)$ é uma antiderivada de $h(y)$ e $G(x)$ é uma antiderivada de $g(x)$. Se não for muito trabalhoso, resolva y dessa equação explicitamente em termos de x ou x dessa equação em termos de y. Caso contrário, deixe a solução da equação diferencial separável em forma implícita.

▶ **Exemplo 1** Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

e, então, resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1$$

Solução Com $y \neq 0$, podemos reescrever essa equação no formato (1) como

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -4x$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int -4x\,dx$$

ou

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

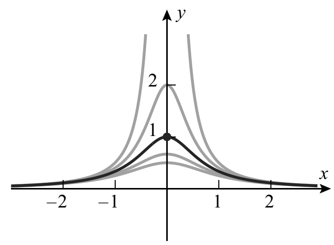
Resolvendo em y como uma função de x, obtemos

$$y = \frac{1}{2x^2 - C}$$

A condição inicial $y(0) = 1$ requer que $y = 1$ quando $x = 0$. Substituindo esses valores na nossa solução, temos $C = -1$ (verifique). Assim, uma solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1}{2x^2 + 1} \tag{6}$$

Algumas curvas integrais e a nossa solução do problema de valor inicial estão esboçadas na **Figura 8.2.1**. ◀



Curvas integrais de $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$

Figura 8.2.1

Um aspecto da nossa solução no Exemplo 1 merece um comentário especial. Se a condição inicial tivesse sido $y(0) = 0$ em vez de $y(0) = 1$, o método que utilizamos teria deixado de fornecer uma solução para o problema de valor inicial (Exercício 25). Isso se deve ao fato de que precisamos supor $y \neq 0$ para poder reescrever a equação $dy/dx = -4xy^2$ no formato

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -4x$$

É importante lembrar dessas hipóteses quando uma equação diferencial for manipulada algebricamente.

Em um problema de valor inicial em que a equação diferencial for separável, podemos usar a condição inicial para resolver em C, como no Exemplo 1, ou substituir as integrais indefinidas do Passo 2 por integrais definidas (Exercício 72).

▶ **Exemplo 2** Resolva o problema de valor inicial

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 0$$

Solução Podemos reescrever essa equação na forma (1) como

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int (4y - \cos y)\,dy = \int 3x^2\,dx$$

ou

$$2y^2 - \operatorname{sen} y = x^3 + C \tag{7}$$

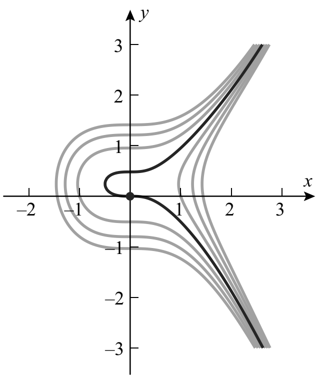
Para o problema de valor inicial, a condição inicial $y(0) = 0$ requer que $y = 0$ se $x = 0$. Substituindo esses valores em (7) para determinar a constante de integração, obtemos $C = 0$ (verifique). Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$2y^2 - \operatorname{sen} y = x^3$$

ou

$$x = \sqrt[3]{2y^2 - \operatorname{sen} y} \quad ◀ \tag{8}$$

A solução de um problema de valor inicial em x e y pode, às vezes, ser expressa explicitamente como uma função de x [como na Fórmula (6) do Exemplo 1] ou como uma função de y [como na Fórmula (8) do Exemplo 2]. Contudo, às vezes, a solução não pode ser expressa em nenhuma dessas formas, de modo que a única opção é expressá-la implicitamente como uma equação em x e y.



Curvas integrais de $(4y - \cos y)\dfrac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$

Figura 8.2.2

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA Alguns CAS podem fazer gráficos de equações implícitas. A Figura 8.2.2 mostra os gráficos de (7) com $C = 0, \pm1, \pm2$ e ±3. Usando um CAS que faça o gráfico de equações implícitas, leia o manual e tente repetir esta figura.

Algumas curvas integrais e a solução do problema de valor inicial do Exemplo 2 estão esboçadas na **Figura 8.2.2**.

Muitos problemas de valor inicial resultam de questões geométricas, como no exemplo seguinte.

▶ **Exemplo 3** Encontre uma curva no plano xy que passe por (0, 3) e cuja reta tangente em um ponto (x, y) tenha inclinação $2x/y^2$.

Solução Como a inclinação da reta tangente é dy/dx, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \tag{9}$$

e, como a curva passa por (0, 3), temos a condição inicial

$$y(0) = 3$$

A Equação (9) é separável e pode ser escrita como

$$y^2\,dy = 2x\,dx$$

portanto,

$$\int y^2\,dy = \int 2x\,dx \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}y^3 = x^2 + C$$

Tem-se, da condição inicial, que $y = 3$ se $x = 0$. Substituindo esses valores na última equação, obtemos $C = 9$ (verifique); portanto, a equação da curva desejada é

$$\tfrac{1}{3}y^3 = x^2 + 9 \quad \text{ou} \quad y = (3x^2 + 27)^{1/3} \blacktriangleleft$$

■ Modelos de crescimento e decaimento exponencial

Os modelos de crescimento populacional e de farmacologia desenvolvidos na Seção 8.1 são exemplos de uma classe geral de modelos chamados de *modelos exponenciais*. Em geral, os modelos exponenciais surgem em situações nas quais uma quantidade cresce ou decresce a uma taxa que é proporcional ao montante de quantidade presente. Mais precisamente, vamos fazer a seguinte definição.

Definição 8.2.1 Dizemos que uma quantidade $y = y(t)$ tem um ***modelo de crescimento exponencial*** se ela crescer a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente, e dizemos que tem um ***modelo de decaimento exponencial*** se ela decresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente. Assim, para um modelo de crescimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz a uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k > 0) \tag{10}$$

e, para um modelo de decaimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (k > 0) \tag{11}$$

A constante k é chamada de ***constante de crescimento*** ou ***constante de decaimento***, conforme apropriado.

As Equações (10) e (11) são separáveis, pois têm o formato de (1), mas com t em vez de x como variável independente. Para ilustrar como essa equações podem ser resolvidas, suponha que uma quantidade positiva $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial e que saibamos o total dessa quantidade em algum instante de tempo, digamos $y = y_0$, quando $t = 0$. Assim, uma fórmula para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

ou (já que $y > 0$)

$$\ln y = kt + C \tag{12}$$

A condição inicial implica que $y = y_0$ quando $t = 0$. Substituindo esses valores em (12), obtemos $C = \ln y_0$ (verifique). Assim,

$$\ln y = kt + \ln y_0$$

do que segue que

$$y = e^{\ln y} = e^{kt + \ln y_0}$$

ou, equivalentemente,

$$y = y_0 e^{kt} \tag{13}$$

Analogamente, se $y = y(t)$ tiver um modelo de decaimento exponencial e se $y(0) = y_0$, então

$$y = y_0 e^{-kt} \tag{14}$$

Interpretação das constantes de crescimento e decaimento

O significado da constante k nas Fórmulas (13) e (14) pode ser entendido reexaminando as equações diferenciais que dão origem a essas fórmulas. Por exemplo, no caso do modelo de crescimento exponencial, a Equação (10) pode ser reescrita como

$$k = \frac{dy/dt}{y} \tag{15}$$

que afirma que a taxa de crescimento, como uma fração da população inteira, permanece constante ao longo do tempo, e essa constante é k. Em outras palavras, a *taxa de crescimento relativo* da população é dada pela constante de crescimento do modelo. Mesmo podendo gerar alguma confusão, é prática comum dizer simplesmente que (15) é a *taxa de crescimento* e expressá-la como uma porcentagem. Assim, uma taxa de crescimento de 3% por unidade de tempo significa que $k = 0{,}03$. Analogamente, a constante k de um modelo de decaimento exponencial costuma ser denominada simplesmente *taxa de decaimento*.

▶ **Exemplo 4** De acordo com os dados das Nações Unidas, a população mundial em 2014 era de, aproximadamente, 7,1 bilhões e estava crescendo a uma taxa em torno de 1,08% ao ano. Supondo um modelo de crescimento exponencial, estime a população mundial no início do ano de 2030.

Solução Vamos supor que a população no início de 2014 era de 7,1 bilhões e sejam

t = tempo decorrido desde o começo de 2014 (em anos)

y = população mundial (em bilhões)

Como o começo de 2014 corresponde a $t = 0$, segue dos dados fornecidos que

$$y_0 = y(0) = 7{,}1 \text{ bilhões}$$

Como a taxa de crescimento é de 1,08% ($k = 0{,}0108$), segue de (13) que a população mundial no instante t será

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 7{,}1 e^{0{,}0108t} \tag{16}$$

Como o começo de 2030 corresponde ao tempo decorrido de $t = 16$ anos (2030 – 2014 = 16 anos), segue de (16) que a população mundial em 2030 será de

$$y(16) = 7{,}1 e^{0{,}0108(16)} \approx 8{,}4$$

que é uma população de 8,4 bilhões, aproximadamente. ◀

No Exemplo 4, a taxa de crescimento foi dada, logo não há a necessidade de calculá-la. Se a taxa de crescimento ou decaimento em um modelo exponencial é desconhecida, então pode ser calculada usando a condição inicial e o valor de y em um outro ponto no tempo (Exercício 44).

Tempo de duplicação e meia vida

Se a quantidade y tiver um modelo de crescimento exponencial, então o tempo necessário para o tamanho inicial dobrar é chamado de ***tempo de duplicação***, e se y tiver um modelo de decaimento exponencial, então o tempo requerido para o tamanho original se reduzir à metade é chamado de ***meia vida***. O tempo de duplicação e a meia vida dependem somente da taxa de crescimento ou de decaimento, e não da quantidade presente inicialmente. Para ver isso, suponha que $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial

$$y = y_0 e^{kt} \tag{17}$$

e seja T o tempo requerido para y dobrar o seu tamanho. Dessa forma, no tempo $t = T$ o valor de y será $2y_0$ e, portanto, de (17)

$$2y_0 = y_0 e^{kT} \quad \text{ou} \quad e^{kT} = 2$$

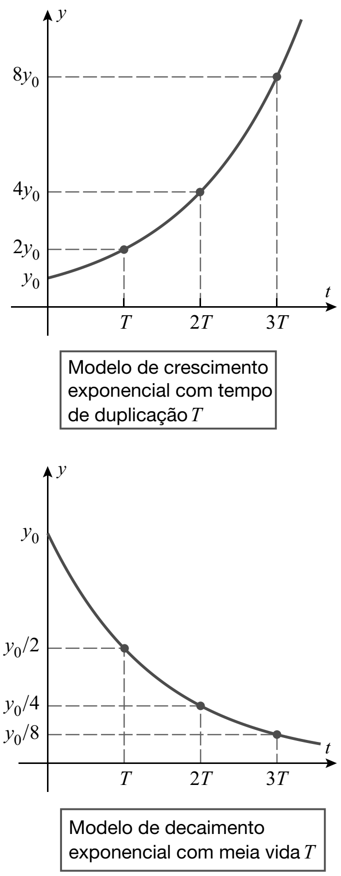


Figura 8.2.3

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados, temos que $kT = \ln 2$, portanto o tempo de duplicação é

$$\boxed{T = \frac{1}{k}\ln 2} \tag{18}$$

Deixaremos como exercício mostrar que a Fórmula (18) também dá a meia vida de um modelo de decaimento exponencial. Observe que essa fórmula não envolve a quantidade inicial y_0, de modo que, em um modelo de crescimento ou de decaimento exponencial, a quantidade y duplica-se (ou reduz-se ao meio) a cada T unidades (**Figura 8.2.3**).

▶ **Exemplo 5** Tem-se a partir de (18) que, com uma taxa de crescimento continuada de 1,08% ao ano, o tempo de duplicação para a população mundial será

$$T = \frac{1}{0{,}0108}\ln 2 \approx 64$$

ou aproximadamente 64 anos. Assim, com uma taxa de crescimento anual continuada de 1,08%, a população de 7,1 bilhões em 2014 dobrará para 14,2 bilhões no ano de 2078 e dobrará outra vez para 28,4 bilhões em 2142. ◀

■ Decaimento radioativo

É um fato da Física que os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em um processo chamado de ***decaimento radioativo***. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de elemento presente, o que implica que a quantidade $y = y(t)$ de elemento radioativo é uma função do tempo com um modelo de decaimento exponencial.

Todo elemento radioativo tem uma meia vida específica; por exemplo, a meia vida do carbono-14 radioativo está em torno de 5.730 anos. Assim, a partir de (18), a constante de decaimento para esse elemento é

$$k = \frac{1}{T}\ln 2 = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0{,}000121$$

e isso implica que, se houver y_0 unidades de carbono-14 presente no instante $t = 0$, então o número de unidades presentes depois de t anos será de aproximadamente

$$y(t) = y_0 e^{-0{,}000121t} \tag{19}$$

▶ **Exemplo 6** Se 100 gramas de carbono-14 radioativo forem armazenados em uma caverna por 1.000 anos, quantos gramas restarão no final desse período?

Solução A partir de (19) com $y_0 = 100$ e $t = 1.000$, obtemos

$$y(1.000) = 100e^{-0{,}000121(1.000)} = 100e^{-0{,}121} \approx 88{,}6$$

Assim, restarão cerca de 88,6 gramas. ◀

■ Datação por carbono

Quando o nitrogênio na parte superior da atmosfera da Terra é bombardeado pelos raios cósmicos, produz-se o elemento carbono-14 radioativo. O carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é ingerido pelas plantas, que por sua vez, são comidas pelos animais. Dessa maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo. Em 1947, o cientista nuclear americano W. F. Libby* propôs a teoria de que a porcentagem de carbono-14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou um animal morre, o carbono-14 no tecido começa a decair. Assim, a idade de um artefato que contenha material animal ou vegetal pode ser estimada determinando qual a porcentagem que resta do seu conteúdo de carbono-14 original. Vários procedimentos, chamados de ***datação por carbono*** ou ***datação por radiocarbono***, foram desenvolvidos para medir essa porcentagem.

* W. F. Libby, "Radiocarbon Dating", *American Scientist*, vol. 44, 1956, pp. 98-112.

▶ **Exemplo 7** Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como o Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Esse pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu Britânico mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93% do carbono-14 original. Use esta informação para estimar a idade do sudário.

Solução A partir de (19), a fração de carbono-14 original que permanece após t anos é

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{-0{,}000121t}$$

Tomando-se o logaritmo natural em ambos os membros e resolvendo-se para t, obtemos

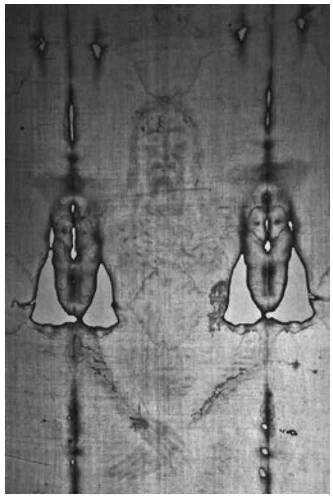
$$t = -\frac{1}{0{,}000121}\ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right)$$

Assim, tomando-se $y(t)/y_0$ como sendo 0,93 e 0,92, obtemos

$$t = -\frac{1}{0{,}000121}\ln(0{,}93) \approx 600$$

$$t = -\frac{1}{0{,}000121}\ln(0{,}92) \approx 689$$

Isso significa que, em 1988, quando o teste foi feito, a idade do sudário estava entre 600 e 689 anos, colocando desta forma a sua origem entre 1299 e 1388 d.C. Portanto, aceitando-se a validade de datar por carbono-14, o sudário de Turim não pode ser de Jesus de Nazaré. ◀



perseomedusa/Depositphotos

O Sudário de Turim.

8.2 | Exercícios de compreensão (*Ver página 488 para respostas.*)

1. Resolva a equação diferencial separável de primeira ordem

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

completando os passos a seguir.

Passo 1 Separe as variáveis escrevendo a equação na forma diferencial __________.

Passo 2 Integre ambos os lados da equação do Passo 1: __________.

Passo 3 Se $H(y)$ for uma antiderivada qualquer de $h(y)$, $G(x)$ for uma antiderivada qualquer de $g(x)$ e C for uma constante não especificada, então, conforme sugerido no Passo 2, a equação _________ em geral definirá implicitamente uma família de soluções de $h(y)\,dy/dx = g(x)$.

2. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial com constante de crescimento $k > 0$.

a. $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt =$ __________.

b. Em termos de k, o tempo de duplicação da quantidade y é __________.

c. Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de y, então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) =$ __________.

3. Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de decaimento exponencial com constante de decaimento $k > 0$.

a. $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt =$ __________.

b. Em termos de k, a meia vida da quantidade y é __________.

c. Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de y, então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) =$ __________.

4. O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

tem solução $y(x) =$ __________.

Exercícios 8.2

G Recurso Gráfico **C** CAS

1-10 Resolva a equação diferencial por separação de variáveis. Quando for razoável, expresse a família de soluções como funções explícitas de x. ■

1. $x\dfrac{dy}{dx} = y$

2. $\dfrac{dy}{dx} = 2(1 + y^2)x$

3. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+y}\dfrac{dy}{dx} = -x$

4. $(1 + 2x^4)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3}{y}$

5. $(2 + 2y^2)y' = e^x y$

6. $y' = -2xy$

7. $e^{-y}\operatorname{sen} x - y'\cos^2 x = 0$

8. $y' = (1 - 2x)(1 + y^2)$

9. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y^2 - y}{\operatorname{sen} x} = 0$

10. $(\operatorname{cossec} x)\dfrac{dy}{dx} = y$

11-14 Resolva o problema de valor inicial por separação de variáveis ■

11. $y' = \dfrac{3x^2}{2y + \cos y}, \quad y(0) = \pi$

12. $y' - xe^{y} = 2e^{y}, \quad y(0) = 0$

13. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t+1}{2y-2}, \quad y(0) = -1$

14. $y' \cosh^2 2x - y \cosh 4x = 0, \quad y(0) = 1$

15. **a.** Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = y/2x$.
b. Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto (2, 1).

16. **a.** Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = -x/y$.
b. Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto (5, 12).

G **17-18** Resolva a equação diferencial e, então, use um recurso computacional para gerar cinco curvas integrais para a equação. ■

17. $(x^2 + 4)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ **18.** $(\cos y)y' = \cos x$

C **19-20** Resolva a equação diferencial e então utilize um recurso gráfico computacional para gerar cinco curvas integrais da equação. ■

19. $y' = \dfrac{x^2}{1 - y^2}$ **20.** $y' = \dfrac{y}{1 + y^2}$

21-24 **Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

21. Toda equação diferencial da forma $y' = f(y)$ é separável.

22. Uma equação diferencial da forma

$$h(x)\frac{dy}{dx} = g(y)$$

não é separável.

23. Se um elemento radioativo tiver uma meia vida de 1 minuto e se um recipiente contiver 32 g desse elemento às 13 horas, então a quantidade que restará às 13h05 será de 1 g.

24. Se uma população estiver crescendo exponencialmente, então o tempo que leva para essa população quadruplicar é independente do tamanho da população.

25. Suponha que a condição inicial no Exemplo 1 tivesse sido $y(0) = 0$. Mostre que nenhuma das soluções geradas no Exemplo 1 satisfaz essa condição inicial e então resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 0$$

Por que o método do Exemplo 1 deixa de fornecer essa solução particular?

26. Encontre todos os pares ordenados (x_0, y_0) tais que se a condição inicial no Exemplo 1 for trocada por $y(x_0) = y_0$, então a solução do problema de valor inicial resultante estará definida em todos os números reais.

27. Encontre uma equação de uma curva que corte o eixo x no ponto 2 e cuja reta tangente em qualquer ponto (x, y) tenha inclinação xe^{-y}.

G **28.** Use um recurso gráfico computacional para gerar uma curva que passe pelo ponto (1, 1) e cuja tangente em qualquer ponto (x, y) tenha inclinação $3x^2/(2y)$.

29. Suponha que uma população inicial de 10.000 bactérias cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por hora e que $y = y(t)$ seja o número de bactérias presentes t horas mais tarde.
a. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
b. Encontre uma fórmula para $y(t)$.
c. Quanto tempo leva para a população inicial de bactérias dobrar?
d. Quanto tempo leva para a população de bactérias atingir 45.000?

30. Uma célula da bactéria *E.colli* divide-se em duas células a cada 20 minutos quando colocada em cultura de nutrientes. Seja $y = y(t)$ o número de células presentes t minutos após uma única célula ter sido colocada na cultura. Suponha que o crescimento da bactéria seja aproximado por um modelo de crescimento exponencial contínuo.
a. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
b. Encontre uma fórmula para $y(t)$.
c. Quantas células estão presentes após 2 horas?
d. Quanto tempo leva para o número de células atingir 1.000.000?

31. O rádon-222 é um gás radioativo com uma meia vida de 3,83 dias. Esse gás é prejudicial à saúde porque tende a ficar preso nos porões das casas, e o Ministério da Saúde sugere que se fechem os porões para evitar a entrada do gás. Suponha que $5{,}0 \times 10^7$ átomos de rádon fiquem presos em um porão no momento em que ele é selado e que $y(t)$ seja o número de átomos presentes t dias mais tarde.
a. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
b. Encontre uma fórmula para $y(t)$.
c. Quantos átomos estarão presentes após 30 dias?
d. Quanto tempo levará para decair 90% da quantidade original do gás?

32. O metilmercúrio é um composto tóxico que pode causar problemas neurológicos e aumentar o risco de doenças cardíacas. O corpo humano leva cerca de 50 dias para eliminar do sistema 50% de uma dada quantidade do composto. Suponha que um teste mostre que há 600 microgramas de metilmercúrio no corpo de uma pessoa e que $y(t)$ seja o número de microgramas presentes t dias depois. Suponha, também, que $y(t)$ tenha um modelo de decaimento exponencial com meia vida de 50 dias e que não seja absorvido nenhum metilmercúrio adicional do meio ambiente.
a. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
b. Encontre uma fórmula para $y(t)$.
c. Quantos miligramas estarão presentes após 4 semanas?
d. Quanto tempo levará para que 70% do metilmercúrio seja eliminado do corpo de uma pessoa?

33. Suponha que 100 moscas-das-frutas sejam colocadas em um recipiente de acasalamento que possa suportar, no máximo, 10.000 moscas. Supondo que a população cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por dia, quanto tempo levará para o recipiente atingir a sua capacidade?

34. Suponha que a cidade de Gray Rock tenha tido uma população de 10.000 em 2014 e de 12.000 em 2019. Supondo que o modelo de crescimento seja exponencial, em que ano a população atingirá 20.000?

35. Uma cientista deseja determinar a meia vida de certa substância radioativa. Ela determina que em exatamente 5 dias uma amostra de 10,0 miligramas da substância decai para 6,5 miligramas. Baseado nesses dados, qual será a meia vida?

36. Suponha que 30% de certa substância radioativa decaiam em 5 anos.

a. Qual é a meia vida da substância em anos?

b. Suponha que uma certa quantidade dessa substância seja estocada em uma caverna. Qual é a porcentagem remanescente após t anos?

Enfocando conceitos

G **37. a.** Faça uma conjectura sobre o efeito nos gráficos de $y = y_0e^{kt}$ e $y = y_0e^{-kt}$ de variar k e manter y_0 fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.

b. Faça uma conjectura sobre os efeitos nos gráficos de $y = y_0e^{kt}$ e $y = y_0e^{-kt}$ de variar y_0 e manter k fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.

38. a. Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia vida de um modelo exponencial de aumentar y_0 e manter k fixo? Justifique a sua resposta.

b. Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia vida de um modelo exponencial de aumentar k e manter y_0 fixo? Justifique a sua resposta.

39. a. Há um truque, chamado de ***Regra dos 70***, que pode ser usado para obter estimativas rápidas do tempo de duplicação e meia vida de um modelo exponencial. De acordo com essa regra, o tempo de duplicação ou meia vida é aproximadamente 70 dividido pela porcentagem da taxa percentual de crescimento ou de decaimento. Por exemplo, mostramos no Exemplo 5 que, com uma taxa de crescimento contínua de 1,08% ao ano, a população mundial dobraria a cada 64 anos. Esse resultado está de acordo com a Regra dos 70, uma vez que $70/1{,}08 \approx 64{,}8$. Explique por que essa regra funciona.

b. Use a Regra dos 70 para estimar o tempo de duplicação de uma população que cresce exponencialmente a uma taxa de 1% ao ano.

c. Use a Regra dos 70 para estimar a meia vida de uma população que decresce exponencialmente a uma taxa de 3,5% por hora.

d. Use a Regra dos 70 para estimar a taxa de crescimento que seria requerida para uma população crescendo exponencialmente dobrar a cada 10 anos.

40. Determine uma fórmula para o tempo de triplicação de um modelo de crescimento exponencial.

41. Em 1950, uma equipe de pesquisa escavando próximo de Folsom, Novo México, encontrou ossos de bisão chamuscados junto a algumas pontas de projéteis em forma de folha (chamados de "pontas de Folsom"), que foram manufaturadas por uma tribo de caçadores palio-indígena. Ficou claro, pela evidência encontrada, que o bisão havia sido cozinhado e comido por quem fez as pontas, de modo que a datação por radiocarbono possibilitou aos pesquisadores determinar quando os caçadores vagaram pela América do Norte. Os testes mostraram que os ossos continham entre 27 e 30% do carbono-14 original. Use esta informação para mostrar que os caçadores viveram aproximadamente entre 9000 e 8000 a.C.

G **42. a.** Use um recurso computacional para fazer um gráfico de p_{rem} *versus* t, onde p_{rem} é a porcentagem de carbono-14 remanescente em um artefato após t anos.

b. Use o gráfico para estimar a porcentagem de carbono-14 que deveria estar presente no teste de 1988 do Sudário de Turim para que ele tivesse sido de Jesus. (Ver Exemplo 7.)

43. a. Aceita-se correntemente que a meia vida do carbono-14 pode variar ±40 anos de seu valor nominal de 5.730 anos. Essa variação torna possível datar o Sudário de Turim como sendo do tempo de Jesus de Nazaré? (Ver Exemplo 7.)

b. Reveja a subseção da Seção 3.5 intitulada Propagação de Erros em Aplicações e então estime o erro percentual que resulta na idade computada de um artefato a partir de r % de erro na meia vida do carbono-14.

44. Suponha que uma quantidade y tenha um modelo de crescimento exponencial $y = y_0e^{kt}$ ou de decaimento exponencial $y = y_0e^{-kt}$ e que $y = y_1$ em $t = t_1$. Em cada caso, determine uma fórmula para k em termos de y_0, y_1 e t_1, supondo que $t_1 \neq 0$.

45. a. Mostre que se uma quantidade $y = y(t)$ tiver um modelo exponencial e se $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$, então o tempo de duplicação ou a meia vida T será

$$T = \left| \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(y_2/y_1)} \right|$$

b. Durante um período de 1 hora o número de bactérias em uma colônia cresce 25%. Supondo um modelo de crescimento exponencial, qual é o tempo de duplicação para a colônia?

46. Suponha que P dólares tenham sido investidos a uma taxa de juros anuais de $r \times 100\%$. Se os juros acumulados forem creditados na conta ao final do ano, então dizemos que eles são *compostos anualmente*; se forem creditados no final de um período de 6 meses, dizemos que são *compostos semestralmente*; se forem creditados ao final de cada período de 3 meses, dizemos que são *compostos trimestralmente*. Quanto mais frequentemente os juros forem compostos, melhor é para o investidor, uma vez que mais juros rendem juros sobre si mesmo.

a. Mostre que se os juros forem compostos n vezes ao ano em intervalos igualmente espaçados, então o valor A do investimento após t anos será

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

b. É possível imaginar juros sendo compostos a cada dia, a cada hora, a cada minuto e assim por diante; levado ao limite, é possível conceber juros compostos a cada instante de tempo; isto é chamado de ***composição contínua***. Assim, pela parte (a), o valor A de P dólares após t anos, quando investidos a uma taxa anual de $r \times 100\%$, compostos continuamente, será

$$A = \lim_{n\to+\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Use o fato de que $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$ para provar que $A = Pe^{rt}$.

c. Use o resultado da parte (b) para mostrar que dinheiro investido a juros compostos contínuos cresce continuamente a uma taxa proporcional à quantidade presente.

47. a. Se \$1.000 forem investidos a 8% ao ano compostos continuamente (Exercício 46), qual será o valor do investimento após 5 anos?

b. Se for desejado que um investimento a 8% ao ano composto continuamente deva ter um valor de \$10.000 após 10 anos, quanto deve ser investido agora?

c. Quanto tempo leva para que um investimento a 8% ao ano composto continuamente dobre seu valor?

48. Qual é a taxa de juros efetiva de uma taxa de juros anual de r% composta continuamente?

49. Suponha que $y = y(t)$ satisfaça a equação logística com o valor inicial $y_0 = y(0)$ de y.

a. Use separação de variáveis para deduzir a solução

$$y = \frac{y_0L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

b. Use a parte (a) para mostrar que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = L$.

50. Use sua resposta do Exercício 49 para deduzir uma solução para o modelo da disseminação de uma doença [Equação (6) da Seção 8.1].

51. O gráfico de uma solução da equação logística é conhecido como uma ***curva logística*** e, se $y_0 > 0$, ela tem um de quatro formatos gerais, que dependem da relação entre y_0 e L. Em cada parte, suponha que $k = 1$ e use um recurso computacional para esboçar a curva logística que satisfaz as condições dadas.

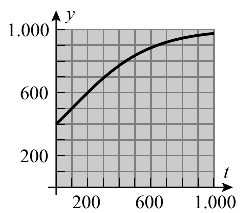
a. $y_0 > L$ **b.** $y_0 = L$
c. $L/2 \leq y_0 < L$ **d.** $0 < y_0 < L/2$

52-53 É mostrado o gráfico de um modelo logístico

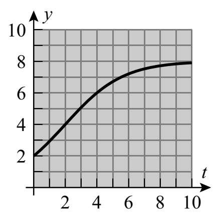
$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

Estime y_0, L e k. ■

52.



53.



54. Esboce uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75\left(1 - \frac{y}{7}\right)y, \quad y(0) = 2$$

55. Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{60}{5 + 7e^{-t}}$$

a. Qual é a população no instante $t = 0$?
b. Qual é a capacidade de tolerância L?
c. Qual é a constante k?
d. Quando a população atinge a metade da capacidade de tolerância?
e. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

56. Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{1.000}{1 + 999e^{-0{,}9t}}$$

a. Qual é a população no instante $t = 0$?
b. Qual é a capacidade de tolerância L?
c. Qual é a constante k?
d. Quando a população atinge 75% da capacidade de tolerância?
e. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

57. Suponha que em um alojamento universitário existam 850 estudantes. Após as férias, 10 estudantes do alojamento retornam com gripe e, 8 dias mais tarde, 20 estudantes estão gripados.

a. Use o resultado do Exercício 50 para encontrar o número de estudantes que estarão gripados t dias após o retorno das férias.
b. Faça uma tabela que ilustre como se espalha a gripe dia a dia por um período de duas semanas.
c. Use um recurso computacional para gerar um gráfico que ilustre como se espalha a gripe por um período de duas semanas.

58. Suponha que, no instante $t = 0$, um objeto com uma temperatura de T_0 é colocado em uma sala a uma temperatura constante de T_a. Se $T_0 < T_a$, então a temperatura do objeto irá subir, enquanto que se $T_0 > T_a$ ela irá baixar. Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, mostre que em ambos os casos a temperatura $T(t)$ no instante t é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

onde k é uma constante positiva.

59. Um copo de água a uma temperatura de 95°C é colocado em uma sala com uma temperatura constante de 21°C.

a. Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, use o resultado do Exercício 58 para encontrar a temperatura da água t minutos após ser colocada na sala. [*Nota*: A solução irá envolver uma constante de proporcionalidade.]
b. Quantos minutos levará para a água atingir uma temperatura de 51°C se ela esfria a 85°C em 1 minuto?

60. Um copo de limonada a uma temperatura de 40°F é colocado em uma sala a uma temperatura constante de 70°F e, 1 hora mais tarde, a sua temperatura é de 52°F. Mostre que t horas após a limonada ter sido colocada na sala, sua temperatura é $T = 10 \cdot (7 \cdot 5^t - 3^{t+1}) \cdot 5^{-t}$.

61. Um foguete, disparado verticalmente para cima a partir do repouso no instante $t = 0$, tem uma massa inicial de m_0 (incluindo o combustível). Supondo que o combustível seja consumido a uma taxa constante k, a massa m do foguete, enquanto o combustível estiver sendo queimado, será dada por $m = m_0 - kt$. Pode ser mostrado que, se a resistência do ar for desprezada e os gases do combustível forem expelidos a uma velocidade constante c em relação ao foguete, a velocidade v do foguete irá satisfazer a equação

$$m\frac{dv}{dt} = ck - mg$$

onde g é a aceleração da gravidade.

a. Determine $v(t)$, lembrando que a massa m é uma função de t.
b. Suponha que o combustível seja responsável por 80% da massa inicial do foguete e que todo o combustível seja consumido em 100 segundos. Determine a velocidade do foguete em metros por segundo no instante em que acabar o combustível. [*Nota*: Tome $g = 9{,}8$ m/s^2 e $c = 2.500$ m/s.]

62. Uma bala de massa m é disparada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de v_0, e torna-se mais lenta pela força de gravidade e uma força de resistência do ar de kv^2, onde k é uma constante positiva. Enquanto a bala move-se para cima, a sua velocidade v satisfaz a equação

$$m\frac{dv}{dt} = -(kv^2 + mg)$$

onde g é a aceleração constante em razão da gravidade

a. Mostre que se $x = x(t)$ for a altura da bala acima da boca da arma no instante t, então

$$mv\frac{dv}{dx} = -(kv^2 + mg)$$

b. Expresse x em termos de v dado que $x = 0$ quando $v = v_0$.
c. Supondo que

$$v_0 = 988 \text{ m/s}, \quad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$
$$m = 3{,}56 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad k = 7{,}3 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$$

use o resultado na parte (b) para encontrar a altura atingida pela bala. [*Sugestão*: Determine a velocidade da bala em seu ponto mais alto.]