CAPÍTULO 1

Vetores

Os vetores são usados na navegação e no estudo de forças e do movimento. Vetores em dimensões maiores ocorrem em campos tão diversos como a Genética, a Economia, a Cristalografia e a Ecologia. Os vetores também são utilizados na Teoria da Relatividade para ajudar a descrever a natureza da gravidade, do espaço e da matéria.

Seção 1.1 Vetores e Matrizes na Engenharia e na Matemática; Espaço *n*-Dimensional

As duas espécies de quantidades com as quais se ocupa a Álgebra Linear são os "vetores" e as "matrizes." O termo "vetor" tem vários significados na Engenharia, na Matemática e nas Ciências, alguns dos quais serão discutidos nesta seção. Começaremos revendo a noção geométrica de vetor, tal como é usada na Física e na Engenharia básicas; em seguida, discutiremos vetores em sistemas de coordenadas bidimensionais e tridimensionais e depois consideraremos como a noção de vetor pode ser estendida para espaços de dimensões superiores. Finalmente, falaremos um pouco sobre matrizes, explicando como elas aparecem e como se relacionam com vetores.

ESCALARES E VETORES

Os engenheiros e os físicos fazem uma distinção entre dois tipos de quantidades físicas: os ***escalares***, que são quantidades que podem ser descritas simplesmente por um valor numérico, e os ***vetores***, que requerem não só um valor numérico, mas também uma direção e um sentido para sua descrição completa. Por exemplo, a temperatura, o comprimento e a rapidez são escalares porque são completamente descritos por um número que diz com "quanto" estamos tratando: digamos, uma temperatura de 20°C, um comprimento de 5 cm ou uma rapidez de 10 m/s. Por outro lado, velocidade, força e deslocamento são vetores porque envolvem, além de um valor numérico, uma direção e um sentido:

- **Velocidade:** sabendo que um navio tem uma rapidez de 10 nós (milhas náuticas por hora, a maneira tradicional de medir rapidez na água) podemos dizer quão rápido o navio se desloca, mas não em que direção está indo. Para traçar um curso, o marinheiro precisa saber a direção e o sentido além da rapidez do barco, digamos, 10 nós na direção nordeste da bússola (Figura 1.1.1*a*). A rapidez, ou velocidade escalar, junto com uma direção e um sentido, formam uma quantidade vetorial denominada ***vetor velocidade***.
- **Força:** quando uma força é aplicada a um objeto, o efeito resultante depende da magnitude da força e da direção e sentido em que é aplicada. Por exemplo, embora as três forças de 10 kgf da Figura 1.1.1*b* tenham a mesma magnitude, elas têm efeitos diferentes sobre o bloco por causa das diferenças em suas direções e sentidos. Junto com uma direção e um sentido, a força forma uma quantidade vetorial denominada ***vetor força***.
- **Deslocamento:** se uma partícula se move ao longo de um caminho de um ponto A a um ponto B no plano (espaço bidimensional) ou no espaço (espaço tridimensional), então a distância em linha reta entre A e B, junto com a direção entre A e B e o sentido de A para B formam uma quantidade vetorial denominada ***vetor deslocamento*** de A a B (Figura 1.1.1*c*). O vetor deslocamento descreve a mudança posicional da partícula sem levar em conta o particular trajeto que a partícula percorre entre as posições inicial e final.

Vetores no plano (espaço bidimensional) ou no espaço (espaço tridimensional) podem ser representados geometricamente por *setas*: o comprimento da seta é proporcional à ***magnitude*** (ou parte numérica) do vetor e a direção e sentido da seta indicam a direção e sentido do vetor. A *origem* da seta é denominada ***ponto inicial*** do vetor e a *extremidade* da seta é o ***ponto final*** do vetor (Figura 1.1.2). Neste livro vamos denotar

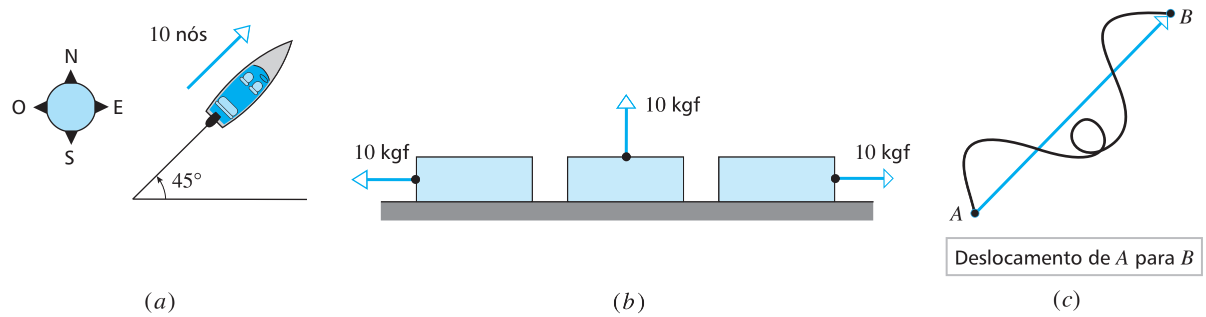


Figura 1.1.1

vetores com letras minúsculas em negrito, como **a**, **k**, **v**, **w** e **x**, e escalares com minúsculas em itálico, como a, k, v, w e x. Se um vetor **v** tem ponto inicial A e ponto final B então denotamos o vetor por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

quando queremos explicitar os pontos inicial e final (Figura 1.1.3).

VETORES EQUIVALENTES

O comprimento da seta mede a magnitude do vetor, o corpo da seta indica a direção e a ponta da seta indica o sentido.

Figura 1.1.2

Nas aplicações ocorrem dois tipos de vetores: os vetores fixos e os livres. Um ***vetor fixo*** ou ***físico*** é um vetor cujo efeito físico depende da localização do ponto inicial, além da magnitude, direção e sentido, enquanto que um ***vetor livre*** ou ***geométrico*** é um vetor cujo efeito físico depende somente da magnitude, direção e sentido. Por exemplo, a Figura 1.1.4 mostra duas forças de 10 kgf aplicadas para cima em um bloco. Embora as forças tenham a mesma magnitude, direção e sentido, as diferenças entre seus pontos de aplicação (os pontos iniciais dos vetores) causam uma diferença no comportamento do bloco. Assim, essas forças devem ser tratadas como vetores fixos. Por outro lado, velocidade e deslocamento são, em geral, tratados como vetores livres. *Neste livro lidaremos exclusivamente com vetores livres, que passamos a denominar simplesmente* vetores, deixando o estudo de vetores *fixos* para disciplinas da Engenharia e da Física.

Como os vetores livres não são afetados por translação, vamos considerar dois vetores **v** e **w** como ***iguais*** (ou então, ***equivalentes***) se eles forem representados por setas paralelas de mesmo comprimento, direção e sentido (Figura 1.1.5). Para indicar que **v** e **w** são vetores equivalentes escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

O vetor cujos pontos inicial e terminal coincidem tem comprimento zero, portanto denominamos este vetor de ***vetor zero*** ou ***vetor nulo*** e o denotamos por **0**. Como o vetor nulo não possui direção ou sentido naturais, convencionamos que ele tem a direção e o sentido que forem convenientes para os nossos propósitos.

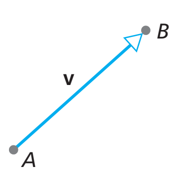
ADIÇÃO DE VETORES

Existem várias operações algébricas importantes efetuadas com vetores, todas originando das leis da Física.

> **Regra do Paralelogramo para a Adição Vetorial** Se **v** e **w** são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo e a ***soma*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial comum de **v** e **w** até o vértice oposto do paralelogramo (Figura 1.1.6*a*).

Uma outra maneira de formar a soma de dois vetores é a seguinte.

> **Regra do Triângulo para a Adição Vetorial** Se **v** e **w** são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que o ponto inicial de **w** é o ponto terminal de **v**, então a ***soma*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial de **v** até o ponto terminal de **w** (Figura 1.1.6*b*).



$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$

Figura 1.1.3

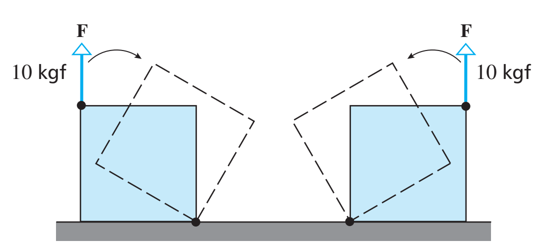
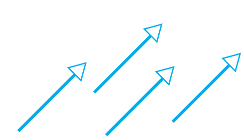


Figura 1.1.4



Vetores equivalentes

Figura 1.1.5

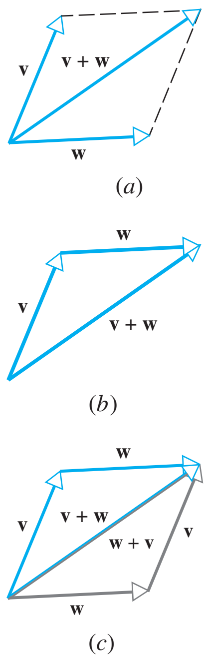


Figura 1.1.6

Na Figura 1.1.6*c* construímos as somas **v** + **w** e **w** + **v** pela regra do triângulo. Esta construção torna evidente que

$$\boxed{\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}} \tag{1}$$

e que a soma obtida pela regra do triângulo coincide com a soma obtida pela regra do paralelogramo.

A adição vetorial também pode ser vista como um processo de translação de pontos.

A Adição Vetorial vista como Translação Se **v**, **w** e **v** + **w** estão posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, então o ponto terminal de **v** + **w** pode ser entendido de duas maneiras:

1. O ponto terminal de **v** + **w** é o ponto que resulta da translação do ponto terminal de **v** na direção e sentido de **w** por uma distância igual ao comprimento de **w** (Figura 1.1.7*a*).
2. O ponto terminal de **v** + **w** é o ponto que resulta da translação do ponto terminal de **w** na direção e sentido de **v** por uma distância igual ao comprimento de **v** (Figura 1.1.7*b*).

Assim, dizemos que **v** + **w** é a ***translação de* v *por* w** ou, então, a ***translação de* w *por* v**.

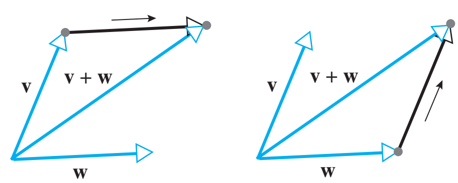


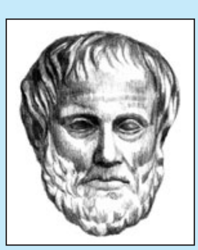
Figura 1.1.7

EXEMPLO 1 Adição Vetorial na Física e na Engenharia

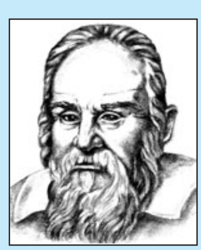
A regra do paralelogramo para a adição vetorial descreve corretamente o comportamento aditivo de forças, velocidades e deslocamentos na Engenharia e na Física. Por exemplo, o efeito de se aplicar as duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ ao bloco na Figura 1.1.8*a* é o mesmo que aplicar a única força $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ ao bloco. Analogamente, se o motor do barco na Figura 1.1.8*b* impõe uma velocidade $\mathbf{v}_1$ e o vento impõe uma velocidade $\mathbf{v}_2$, então o efeito combinado de motor e vento impõem a velocidade $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ao barco. Finalmente, se uma partícula sofre um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ de A até B e em seguida um deslocamento $\overrightarrow{BC}$ de B a C (Figura 1.1.8*c*), então os deslocamentos sucessivos são iguais ao único deslocamento $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ de A a C. ■

A Álgebra Linear na História

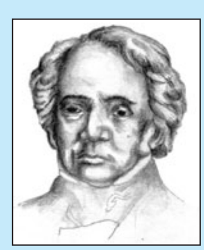
A idéia de poder utilizar um segmento de reta orientado (uma seta) para representar a magnitude, a direção e o sentido de uma velocidade, de uma força ou de um deslocamento, desenvolveu-se gradualmente no decorrer de um longo período de tempo. O lógico grego Aristóteles, por exemplo, sabia que o efeito combinado de duas forças era dado pela lei do paralelogramo e o astrônomo italiano Galileu enunciou a lei explicitamente em seu trabalho de Mecânica. Aplicações de vetores à Geometria apareceram num livro intitulado *Der Barycentrische Calcul*, publicado em 1827 pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius. Em 1837 Möbius publicou uma obra de Estática na qual ele usava a idéia de resolver um vetor em componentes. Durante o mesmo período, o matemático italiano Giusto Bellavitis propôs uma "álgebra" de segmentos de reta orientados nos quais os segmentos de reta de mesmo comprimento, direção e sentido deveriam ser considerados iguais. Bellavitis publicou seu trabalho em 1832.



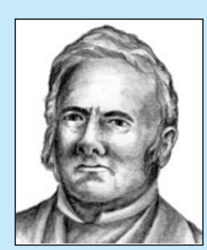
Aristóteles
(384 a.C.-322 a.C.)



Galileu Galilei
(1564-1642)



August Ferdinand Möbius
(1790-1868)



Giusto Bellavitis
(1803-1880)

SUBTRAÇÃO DE VETORES

Na aritmética comum de números podemos escrever $a - b = a + (-b)$, que expressa a subtração em termos da adição. Na aritmética de vetores utilizamos a idéia correspondente.

> **Subtração Vetorial** O ***negativo*** de um vetor **v**, denotado por **–v**, é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção do que **v**, mas tem sentido oposto (Figura 1.1.9a), e o vetor ***diferença*** de **v** com **w**, denotado por **w** – **v**, é definido como sendo a soma
>
> $$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$

A diferença de **v** com **w** pode ser obtida geometricamente pelo método do paralelogramo mostrado na Figura 1.1.9*b* ou, mais diretamente, posicionando **w** e **v** de tal modo que seus pontos iniciais coincidem e traçando um vetor do ponto terminal de **v** ao ponto terminal de **w** (Figura 1.1.9*c*).

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Às vezes ocorre a necessidade de se mudar o comprimento de um vetor ou mudar seu comprimento e trocar seu sentido. Isto é alcançado com um tipo de multiplicação na qual vetores são multiplicados por escalares. Como um exemplo, o produto 2**v** denota o vetor de mesma direção e sentido do que **v**, mas com o dobro do comprimento, e o produto –2**v** denota o vetor de mesma direção do que **v**, mas com o sentido oposto e o dobro do comprimento. Em geral, temos o seguinte.

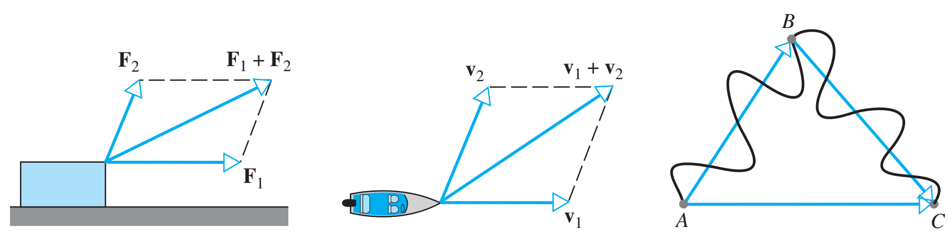


Figura 1.1.8 (*a*) (*b*) (*c*)

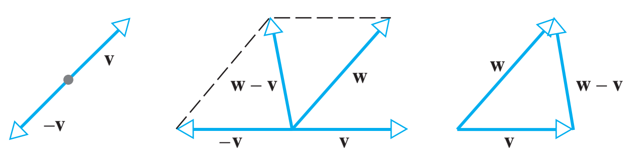


Figura 1.1.9 (*a*) (*b*) (*c*)

> **Multiplicação por Escalar** Se **v** é um vetor não-nulo e k é um escalar não-nulo, então o ***múltiplo escalar*** de **v** por k, denotado por $k\mathbf{v}$, é o vetor de mesma direção do que **v**, mas cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de **v** e cujo sentido é o mesmo que o de **v** se $k > 0$ e o oposto do de **v** se $k < 0$. Se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então tomamos $k\mathbf{v} = 0$.

A Figura 1.1.10 mostra a relação geométrica entre um vetor **v** com alguns de seus múltiplos escalares. Em particular, observe que (–1)**v** tem o mesmo comprimento e direção do que **v**, mas sentido oposto; assim,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

VETORES EM SISTEMAS DE COORDENADAS

Embora as setas sejam úteis para a descrição geométrica de vetores, é desejável ter alguma maneira de descrever os vetores algebricamente e para isso consideramos os vetores em sistemas de coordenadas retangulares. Iniciamos com uma revisão das idéias básicas de sistemas coordenados no plano e no espaço.

Recorde que um ***sistema de coordenadas retangulares no plano*** consiste de dois eixos coordenados perpendiculares que em geral são denominados ***eixo x*** e ***eixo y***. O ponto de interseção dos eixos é denominado a ***origem*** do sistema de coordenadas. Neste livro suporemos sempre que a mesma escala seja utilizada em ambos eixos e que o eixo y positivo está a 90° no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo (Figura 1.1.11a).

Uma vez introduzido um sistema de coordenadas retangulares, podemos usar a construção da Figura 1.1.11*b* para obter uma correspondência bijetora entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais; assim, cada ponto P está associado a um único par ordenado (a, b) de números reais e cada par ordenado de números reais (a, b) está associado a um único ponto P. Os números do par ordenado são denominados as ***coordenadas*** de P e o ponto é denotado por $P(a, b)$ quando é importante enfatizar suas coordenadas.

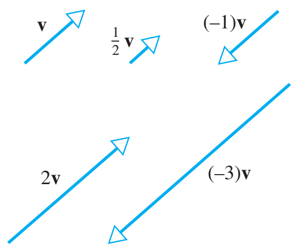


Figura 1.1.10

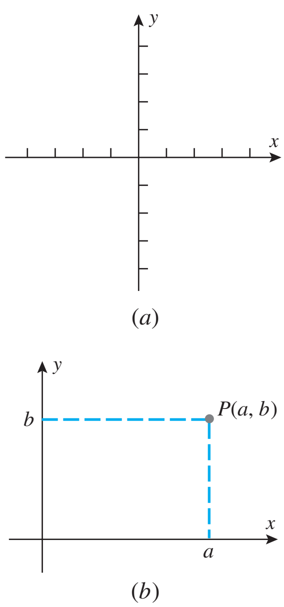


Figura 1.1.11

Um ***sistema de coordenadas retangulares no espaço*** consiste de três eixos coordenados mutuamente perpendiculares que em geral são denominados ***eixo x***, ***eixo y*** e ***eixo z***. O ponto de interseção dos eixos é denominado a ***origem*** do sistema de coordenadas. Como no caso do plano, suporemos que a mesma escala seja utilizada nos três eixos coordenados.

Os sistemas de coordenadas no espaço podem ser ***de mão esquerda*** ou ***de mão direita***. Para distinguir um do outro, suponha que uma pessoa esteja de pé na origem com sua cabeça no sentido do eixo z positivo e seus braços estendidos ao longo dos eixos x e y positivos. O sistema de coordenadas é de mão esquerda ou de mão direita de acordo com qual de seus braços está no sentido do eixo x positivo (Figura 1.1.12a). *Neste livro trataremos exclusivamente com sistemas de coordenadas de mão direita*. Observe que num sistema de mão direita, um parafuso comum apontando no sentido do eixo z positivo avança se o eixo x positivo é girado em direção ao eixo y positivo pelo ângulo de 90º entre estes eixos (Figura 1.1.12*b*). Uma vez introduzido um sistema de coordenadas retangulares no espaço, a construção mostrada na Figura 1.1.12*c* produz uma correspondência bijetora entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais; assim, cada ponto P do espaço está associado a um único terno ordenado (a, b, c) de números reais e cada terno ordenado de números reais (a, b, c) está associado a um único ponto P. Os números do terno ordenado são denominados as ***coordenadas*** de P e o ponto é denotado por $P(a, b, c)$ quando é importante enfatizar suas coordenadas associadas.

Se um vetor $\mathbf{v}$ do plano ou do espaço está posicionado de tal maneira que o seu ponto inicial está na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o vetor está completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto final e dizemos que estas coordenadas são os ***componentes*** do vetor $\mathbf{v}$ em relação ao sistema de coordenadas. Escrevemos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ para o vetor $\mathbf{v}$ no plano com componentes (v_1, v_2) e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para o vetor $\mathbf{v}$ do espaço com componentes (v_1, v_2, v_3) (Figura 1.1.13). Note que o formato de componentes do vetor zero no plano ou no espaço é $\mathbf{0} = (0, 0)$ ou $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, respectivamente.

Deveria ser geometricamente evidente que dois vetores no plano ou no espaço são equivalentes se, e somente se, eles têm o mesmo ponto final quando seus pontos iniciais estão colocados na origem. Algebricamente isto significa que dois vetores são equivalentes se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais. Assim, os vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ são equivalentes se, e somente se, $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$; os vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são equivalentes se, e somente se, $v_1 = w_1, v_2 = w_2$ e $v_3 = w_3$.

Algebricamente, os vetores no plano podem ser vistos como pares ordenados de números reais e os vetores no espaço como ternos ordenados de números reais. Assim, vamos denotar o conjunto de todos vetores do plano por R^2 e o conjunto de todos vetores do espaço por R^3 (onde o "R" significa "real.")

OBSERVAÇÃO Já pode ter ocorrido ao leitor que pares ou ternos ordenados são usados tanto para representar pontos quanto vetores no plano ou no espaço. Assim, sem informação adicional, não há como dizer se o par ordenado (v_1, v_2) representa o *ponto* de coordenadas v_1 e v_2 ou o *vetor* de componentes v_1 e v_2 (Figura 1.1.14). A interpretação apropriada depende do ponto de vista geométrico que queremos enfatizar.

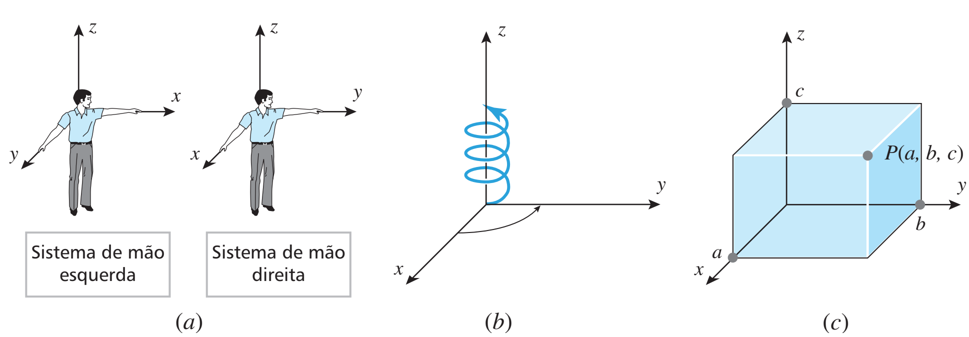


Figura 1.1.12

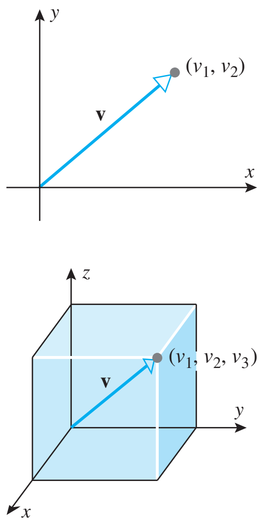
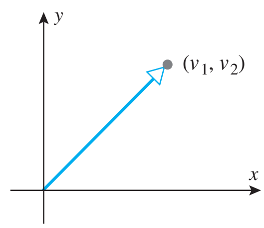
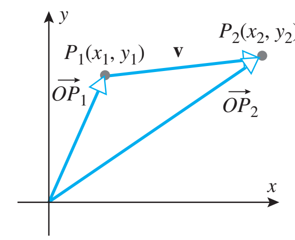


Figura 1.1.13



O par ordenado (v_1, v_2) pode representar um ponto ou um vetor.

Figura 1.1.14



$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

Figura 1.1.15

COMPONENTES DE UM VETOR CUJO PONTO INICIAL NÃO ESTÁ NA ORIGEM

Às vezes precisamos encontrar os componentes de um vetor **v** em R^2 ou R^3 que não tem seu ponto inicial na origem. Para obter isso, seja **v** um vetor em R^2 com seu ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$. Conforme sugere a Figura 1.1.15, podemos expressar **v** em termos dos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ como

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ou seja, *os componentes de* **v** *são obtidos subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas correspondentes do ponto final.* O mesmo resultado vale no espaço e temos o teorema seguinte.

Teorema 1.1.1

(*a*) *O vetor no plano que tem ponto inicial* $P_1(x_1, y_1)$ *e ponto terminal* $P_2(x_2, y_2)$ *é*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{4}$$

(*b*) *O vetor no espaço que tem ponto inicial* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e ponto terminal* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *é*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{5}$$

EXEMPLO 2 Componentes de um Vetor Cujo Ponto Inicial Não Está na Origem

O vetor que tem ponto inicial em P_1 (2, –1, 4) e ponto terminal em P_2 (7, 5, –8) tem componentes

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

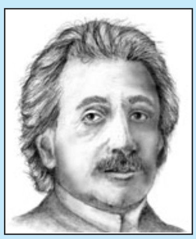
Isto significa que se o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é transladado de tal modo que seu ponto inicial está na origem, então seu ponto final cai no ponto (5, 6, –12). ■

VETORES EM R^n

A idéia de usar pares e ternos ordenados de números reais para representar pontos e vetores no plano e no espaço era bem conhecida nos séculos dezoito e dezenove, mas ao final do século dezenove e início do século vinte os matemáticos e físicos começaram a reconhecer a importância física de *espaços de dimensões maiores*. Um dos exemplos mais importantes é devido a Albert Einstein, que acrescentou um componente temporal t aos três componentes espaciais (x, y, z) para obter uma quádrupla (x, y, z, t) que ele considerou como um ponto de um universo espaço-tempo de dimensão quatro. Embora não possamos ver um espaço de dimensão 4 da maneira como vemos espaços de duas e três dimensões, mesmo assim é possível estender idéias geométricas familiares a quatro dimensões trabalhando com as propriedades algébricas de quádruplas. De fato, desenvolvendo uma geometria apropriada do universo espaço-tempo de dimensão quatro, Einstein desenvolveu a sua teoria da relatividade geral, que explicou pela primeira vez como funciona a gravidade. Para explorar o conceito de espaços de dimensões superiores somos levados à seguinte definição.

A Álgebra Linear na História

O físico Albert Einstein, nascido na Alemanha, emigrou aos Estados Unidos da América em 1933, onde ele fixou residência em Princeton. Einstein ficou trabalhando sem êxito durante as três últimas décadas de sua vida na tentativa de produzir uma *Teoria do Campo Unificado*, que estabeleceria uma relação subjacente entre as forças da gravidade e do eletromagnetismo. Recentemente, os físicos progrediram no problema utilizando uma nova abordagem, conhecida como a *Teoria das Cordas*. Nesta teoria, os componentes menores e indivisíveis do universo não são partículas, mas laços que se comportam como cordas vibrantes. Enquanto o universo espaço-tempo de Einstein era de dimensão 4, as cordas vivem num mundo de dimensão 11, que é o foco de muita pesquisa atual. (Baseado num artigo da revista *Time Magazine*, de 30 de setembro de 1999.)



Albert Einstein
(1879-1955)

Definição 1.1.2 Se n é um inteiro positivo, então uma ***ênupla ordenada*** é uma seqüência de n números reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado o ***espaço n-dimensional*** e é denotado por R_n.

Vamos denotar ênuplas usando a notação vetorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Escrevemos $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ para a ênupla cujos componentes são todos zero e dizemos que este vetor é o ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** ou, ainda, a ***origem*** de R_n.

OBSERVAÇÃO Pensamos nos números de uma ênupla $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ou como as coordenadas de um *ponto generalizado* ou como os componentes de um *vetor generalizado*, dependendo da imagem geométrica que queremos utilizar: a escolha não faz diferença matemática alguma, pois são as propriedades algébricas das ênuplas que nos interessam.

Uma 1-upla ordenada ($n = 1$) é um único número real, de modo que R^1 pode ser visto, algebricamente, como o conjunto dos números reais ou, geometricamente, como uma linha reta. Uma 2-upla ordenada ($n = 2$) é um par ordenado de números reais, de modo que R^2 pode ser visto, geometricamente, como um plano. Uma 3-upla ordenada ($n = 3$) é um terno ordenado de números reais, de modo que R^3 pode ser visto, geometricamente, como o espaço à nossa volta. Às vezes dizemos que R^1, R^2 e R^3 são os ***espaços visíveis*** e que R^4, etc., são os ***espaços de dimensões superiores***. A seguir apresentamos uma lista de exemplos físicos que levam a espaços de dimensões superiores.

EXEMPLO 3 Alguns Exemplos de Vetores em Espaços de Dimensões Superiores

- **Dados Experimentais**: Um cientista realiza uma série de experimentos e toma n medições numéricas a cada realização do experimento. O resultado de cada experimento pode ser pensado como um vetor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em R^n, no qual $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos.
- **Transporte e Armazenamento**: Uma companhia de transporte de cargas tem 15 terminais com depósitos de armazenamento de carga e oficinas de manutenção de seus caminhões. Em cada instante de tempo, a distribuição dos caminhões nos terminais pode ser descrita por uma 15-upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{15})$ na qual x_1 é o número de caminhões no primeiro terminal, x_2 é o número de caminhões no segundo terminal e assim por diante.
- **Circuitos Elétricos**: Um certo tipo de microprocessador eletrônico é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produzir três voltagens em resposta. As voltagens de entrada podem ser consideradas como vetores de R^4 e as de resposta como vetores de R^3. Assim, o microprocessador pode ser visto como um aparelho que transforma cada vetor de entrada $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de R^4 num vetor de resposta $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de R^3.
- **Imagens Digitalizadas**: Uma maneira pela qual são criadas as imagens coloridas nas telas dos monitores de computadores é associar a cada pixel (que é um ponto endereçável da tela) três números, que descrevem o ***matiz***, a ***saturação*** e o ***brilho*** do pixel. Assim, uma imagem colorida completa pode ser vista como um conjunto de 5-uplas da forma $\mathbf{v} = (x, y, h, s, b)$ na qual x e y são as coordenadas do pixel na tela e h, s e b são o matiz (com a inicial do termo em inglês *hue*), a saturação e brilho.
- **Economia**: Uma abordagem da Análise Econômica é dividir uma economia em setores (manufatura, serviços, utilidades, e assim por diante) e medir o produto de cada setor com um valor monetário. Assim, numa economia com 10 setores, o produto total de economia toda pode ser representado por uma 10-upla $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{10})$ na qual os números $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ são os produtos dos setores individuais.
- **Sistemas Mecânicos**: Seis partículas se movem ao longo da mesma reta coordenada de tal modo que no instante t suas coordenadas são $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e suas velocidades são $v_1, v_2, \ldots, v_6$, respectivamente. Esta informação pode ser representada pelo vetor

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t)$$

de R^{13}. Este vetor é denominado o ***estado*** do sistema de partículas no instante t. ■

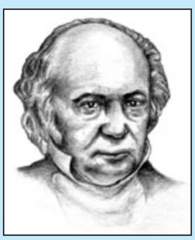
PROBLEMA CONCEITUAL Tente pensar em algum outro exemplo físico no qual possam surgir ênuplas.

IGUALDADE DE VETORES

Observamos acima que dois vetores em R^2 ou R^3 são equivalentes se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais. Assim, apresentamos a seguinte definição.

A Álgebra Linear na História

A idéia de representar vetores como ênuplas de vetores começou a cristalizar em torno de 1814 quando o contador suíço (e matemático amador) Jean Robert Argand (1768-1822) propôs a idéia de representar um número complexo $a + bi$ como um par ordenado (a, b) de números reais. Em seguida, o matemático irlandês William Hamilton desenvolveu sua teoria de *quatérnios*, que constituem o primeiro exemplo importante de um espaço quadridimensional. Hamilton apresentou suas idéias num artigo científico apresentado à Academia Irlandesa em 1833. O conceito de um espaço n-dimensional ficou firmemente estabelecido em 1844 quando o matemático alemão Hermann Grassmann publicou um livro intitulado *Ausdehnungslehre*, no qual ele desenvolveu muitas das idéias fundamentais que aparecem neste livro.



Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Hermann Günther Grassmann
(1809-1877)

Definição 1.1.3 Dois vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de R^n são ditos ***equivalentes*** (ou, então, ***iguais***) se

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad v_n = w_n,$$

Indicamos esta equivalência escrevendo $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Assim, por exemplo,

$$(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$$

se, e somente se $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$ e $d = 7$.

Nosso próximo objetivo é definir as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar para vetores de R^n. Para motivar as idéias, vamos considerar como estas operações podem ser efetuadas com componentes usando vetores de R^2. Observando a Figura 1.1.16, é possível deduzir que se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{6}$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{7}$$

Dito em palavras, *vetores são somados pela adição de seus componentes correspondentes* e *um vetor é multiplicado por um escalar pela multiplicação de cada componente pelo escalar*. Em particular, por (7) segue

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (-v_1, -v_2) \tag{8}$$

e portanto que

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2) \tag{9}$$

Assim, *vetores são subtraídos pela subtração de seus componentes correspondentes*.

As Fórmulas (6)-(9) justificam a seguinte definição.

Definição 1.1.4 Se $\mathbf{v}= (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w}= (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n e se k é um escalar, então definimos

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \tag{10}$$

$$k\mathbf{v} = (k_{v1}, k_{v2}, \ldots, kv_n) \tag{11}$$

$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \tag{12}$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \tag{13}$$

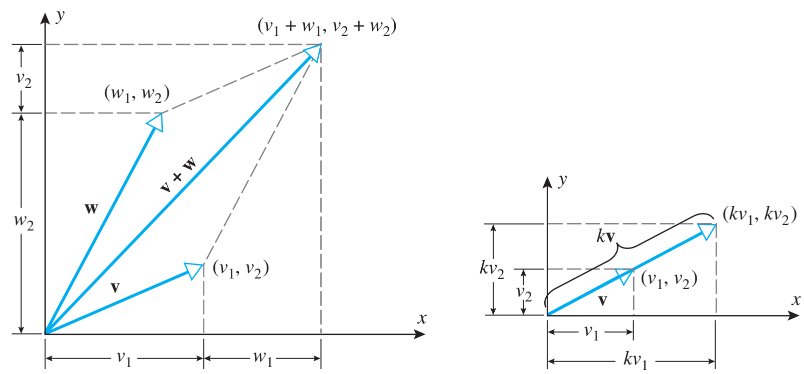
EXEMPLO 4 Operações Algébricas Usando Componentes

Se $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$$
$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \qquad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$

■

O próximo teorema resume as propriedades mais importantes das operações vetoriais.



Figuras 1.1.16

Teorema 1.1.5 *Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n *e se* k *e* l *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
(*e*) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$
(*f*) $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$
(*g*) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Vamos provar a parte (*b*) e deixar algumas das outras partes como exercícios.

Prova (b) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)] + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) && \textbf{[Adição vetorial]} \\
&= \big((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n\big) && \textbf{[Adição vetorial]} \\
&= \big(u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)\big) && \textbf{[Reagrupando]} \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) && \textbf{[Adição vetorial]} \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}$$

As seguintes propriedades adicionais dos vetores de R^n podem ser deduzidas facilmente expressando os vetores em termos de componentes (verifique).

Teorema 1.1.6 *Se* **v** *é um vetor em* R^n *e se* k *é um escalar, então:*

(*a*) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
(*b*) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(*c*) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

OLHANDO À FRENTE O Teorema 1.1.5 é um dos teoremas mais fundamentais da Álgebra Linear pois todas as propriedades algébricas de vetores podem ser deduzidas das oito propriedades enunciadas no teorema. Por exemplo, embora o Teorema 1.1.6 possa ser facilmente provado usando componentes, ele também pode ser deduzido das propriedades do Teorema 1.1.5 sem precisar abrir os vetores em componentes (Exercício P3). Adiante utilizaremos o Teorema 1.1.5 como ponto de partida para estender o conceito de vetor para além do R^n.

SOMAS DE TRÊS OU MAIS VETORES

A parte (*b*) do Teorema 1.1.5 é denominada a ***lei da associatividade da adição vetorial*** e implica que a expressão **u** + **v** + **w** não é ambígua, pois resulta na mesma soma independentemente da maneira em que inserimos parênteses. Este fato é ilustrado geometricamente na Figura 1.1.17*a* para vetores de R^2 e R^3. Aquela figura também mostra que o vetor **u** + **v** + **w** pode ser obtido colocando **u**, **v** e **w** cada um com ponto inicial no ponto final do anterior e então traçando o vetor do ponto inicial de **u** até o ponto final de **w**. Este resultado generaliza para somas de quatro ou mais vetores em R^2 ou R^3 (Figura 1.1.17*b*). O método de colocar ponto inicial no final do anterior torna evidente que se **u**, **v** e **w** são vetores de R^3 que estão posicionados com um ponto inicial comum então **u** + **v** + **w** é a diagonal do paralelepípedo que tem os três vetores como arestas adjacentes (Figura 1.1.17*c*).

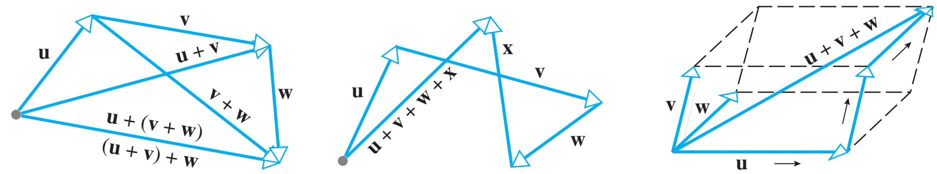


Figura 1.1.17 (*a*) (*b*) (*c*)

VETORES PARALELOS E COLINEARES

Sejam **v** e **w** vetores em R^2 ou R^3 que estão posicionados com um ponto inicial comum. Se um dos vetores é um múltiplo escalar do outro, então os vetores estão numa reta comum e portanto é razoável dizer que são *colineares* (Figura 1.1.18*a*). Contudo, se transladamos um dos vetores como indicado na Figura 1.1.18*b*, então os vetores são *paralelos*, mas não mais colineares. Isso cria um problema lingüístico, já que um vetor não muda com uma translação. A única saída é concordar que os termos *paralelo* e *colinear* significam a mesma coisa quando aplicados a vetores. Por isso utilizamos a seguinte definição.

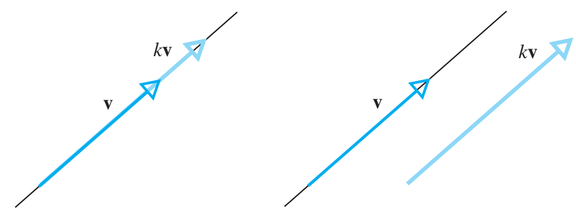


Figura 1.1.18 (*a*) (*b*)

> **Definição 1.1.7** Dois vetores de R^n são ditos ***paralelos*** ou, então, ***colineares***, se pelo menos um dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro. Se um dos vetores é um múltiplo escalar positivo do outro, então dizemos que os dois vetores têm ***mesma direção e mesmo sentido*** e se um deles é um múltiplo escalar negativo do outro, então dizemos que os dois vetores têm ***mesma direção e sentido oposto***.

OBSERVAÇÃO O vetor **0** é paralelo a *cada* vetor **v** de R^n, pois pode ser dado como o múltiplo escalar $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

COMBINAÇÕES LINEARES

As operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são usadas, freqüentemente, em combinação para formar novos vetores. Por exemplo, se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores dados, então os vetores

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

são formados desta maneira. Em geral, utilizamos a seguinte terminologia.

> **Definição 1.1.8** Um vetor **w** de R^n é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ de R^n se **w** pode ser expresso na forma
>
> $$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{14}$$
>
> Os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são denominados ***coeficientes*** da combinação linear. No caso em que $k = 1$, a Fórmula (14) se torna $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1$, de modo que dizer que **w** é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ é o mesmo que dizer que **w** é um múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$.

APLICAÇÃO A MODELOS DE COR COMPUTADORIZADA

As cores nas telas dos monitores de computadores são geralmente baseadas no que se chama o ***modelo de cores* RGB**. As cores neste sistema são criadas juntando percentagens de três cores primárias, a saber, o vermelho (com a inicial *R* do inglês *red*), o verde (com a inicial *G* do inglês *green*) e o azul (com a inicial *B* do inglês *blue*). Uma maneira de fazer isto é identificar as cores primárias com os vetores

$$\mathbf{r} = (1, 0, 0) \quad \text{(vermelho puro)}, \qquad \mathbf{g} = (0, 1, 0) \quad \text{(verde puro)}, \qquad \mathbf{b} = (0, 0, 1) \quad \text{(azul puro)}$$

de R^3 e criar todas as outras cores formando combinações lineares de **r**, **g** e **b** usando coeficientes entre 0 e 1, inclusive; estes coeficientes representam a percentagem de cada cor pura na mistura. O conjunto de todas estas cores é o ***espaço* RGB** ou, melhor, o ***cubo de cores* RGB** (Figura 1.1.19). Assim, cada vetor de cor **c** neste cubo pode ser expresso como uma combinação linear da forma

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b} = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

onde $0 \leq c_i \leq 1$. Como indicamos na figura, os vértices do cubo representam as cores primárias puras junto com as cores preto, branco, magenta, ciano e amarelo. Os vetores ao longo da diagonal entre preto e branco representam tonalidades de cinza.

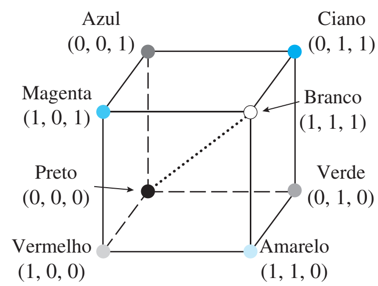


Figura 1.1.19

NOTAÇÕES ALTERNATIVAS PARA VETORES

Até aqui temos escrito vetores de R^n usando a notação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{15}$$

Dizemos que esta é a forma ***de ênupla***. Contudo, um vetor em R^n é, essencialmente, somente uma lista de n números (os componentes) ordenados de uma maneira específica e, portanto, qualquer notação que exibe os componentes do vetor em sua ordem correta é uma alternativa válida para a notação de ênupla. Por exemplo, o vetor em (15) pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \tag{16}$$

que é a forma ***vetor-linha*** ou como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

que é denominada a forma ***vetor-coluna***. A escolha de notação é, muitas vezes, uma questão de conveniência, mas às vezes a natureza do problema que estamos considerando sugere uma notação específica. As três notações serão utilizadas neste livro.

MATRIZES

A informação numérica é, muitas vezes, organizada em tabelas denominadas *matrizes*. Por exemplo, aqui temos uma descrição matricial do número de horas que um certo aluno passa estudando quatro disciplinas ao longo de uma certa semana:

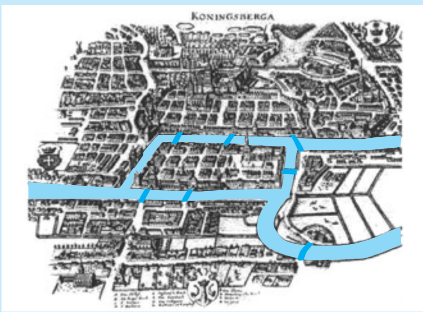
	Segunda	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**	**Sábado**	**Domingo**
Matemática	2	1	2	0	3	0	1
Inglês	2	0	1	3	1	0	1
Química	1	3	0	0	1	0	1
Física	1	2	4	1	0	0	2

Suprimindo as legendas, os dados numéricos que restam da tabela formam uma matriz de quatro linhas e sete colunas:

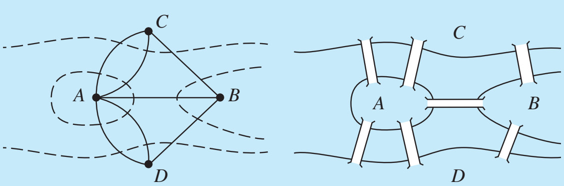
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

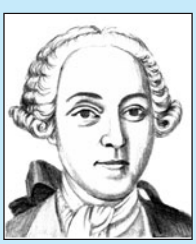
A Álgebra Linear na História

A teoria de grafos iniciou com o matemático suíço Leonhard Euler, que desenvolveu as idéias para resolver um problema que lhe foi proposto na metade do século dezoito pelos cidadãos da cidade prussiana de Königsberg (atualmente Kalinigrado, na Rússia). A cidade é cortada pelo rio Pregel, que engloba uma ilha, como mostra a reprodução da litografia original abaixo.



O problema era determinar se é possível começar um passeio em algum ponto das margens do rio, ou da ilha, e percorrer a pé todas as pontes, cada uma somente uma vez, e voltar ao ponto de partida. Analisando o grafo, Euler mostrou em 1736 que este passeio é impossível.



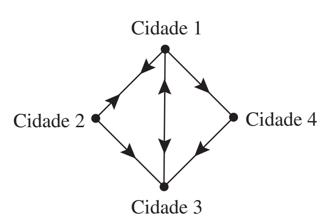


Leonhard Euler
(1707-1783)

Para formalizar esta idéia, definimos uma ***matriz*** como um arranjo retangular de números, denominados as ***entradas*** da matriz. Se uma matriz tem m linhas e n colunas, dizemos que é de ***tamanho*** $m \times n$, onde sempre escrevemos o número de linhas antes do de colunas. Assim, por exemplo, a matriz de (18) tem tamanho 4×7. Uma matriz com uma única linha é denominada ***vetor-linha*** e uma matriz de uma única coluna é denominada ***vetor-coluna*** [ver (16) e (17), por exemplo]. Também podemos pensar numa matriz como uma lista de vetores-linha ou de vetores-coluna. Por exemplo, a matriz de (18) pode ser vista como uma lista de quatro vetores-linha de R^7, ou então como uma lista de sete vetores-coluna de R^4.

Além de descrever informação tabular, as matrizes são úteis para descrever *conexões* entre objetos, digamos, conexões entre cidades por linhas aéreas, conexões entre pessoas em estruturas sociais ou conexões entre elementos de um circuito elétrico. A idéia é representar os objetos que são conectados por pontos, denominados ***vértices***, ou ***nós***, e indicar as conexões entre os vértices por segmentos de reta ou de arcos, denominados ***arestas***, ou ***arcos***. Os vértices e as arestas constituem o que é denominado um ***grafo de conexões*** ou, mais simplesmente, ***grafo***. Por exemplo, a Figura 1.1.20*a* mostra um grafo que descreve as linhas áreas entre quatro cidades; as cidades que têm uma conexão aérea direta entre elas são ligadas por uma aresta. As setas nas arestas distinguem entre ***conexões de ida e volta*** e ***conexões só de ida***; por exemplo, a seta dupla na aresta ligando as cidades 1 e 3 indica que existe uma conexão da cidade 1 para a cidade 3 e uma da cidade 3 para a cidade 1, enquanto que a seta simples na aresta ligando as cidades 1 e 4 indica que existe uma conexão da cidade 1 para a cidade 4, mas não uma da cidade 4 para a cidade 1. Um grafo marcado com conexões de ida e de ida e volta é denominado um ***grafo direcionado***.

Um grafo direcionado pode ser descrito por uma matriz $n \times n$ denominada ***matriz de adjacência***, na qual os dígitos 0 e 1 são usados para descrever conexões. Especificamente, se os vértices são numerados de 1 a n, então a entrada na linha i e coluna j da matriz é um 1 se existe uma conexão do vértice i ao vértice j e é um 0 se não houver uma conexão. Por exemplo, a Figura 1.1.20*b* é a matriz de adjacência do grafo direcionado da parte (*a*) da figura (verifique).



(*a*)

$$\begin{array}{cc} & \text{De} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{Para} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(*b*)

Figura 1.1.20

Exercícios 1.1

Nos Exercícios 1 e 2, esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem.

1. (a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 0)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, -3)$

2. (a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (-1, 6, 1)$

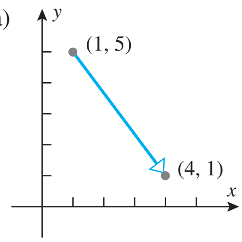
Nos Exercícios 3 e 4, esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem, sabendo que $\mathbf{u} = (1, 1)$ e que $\mathbf{v} = (-1, 1)$.

3. (a) $2\mathbf{u}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (c) $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (e) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

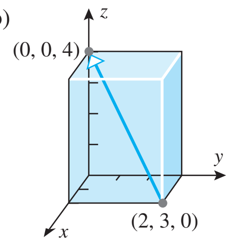
4. (a) $-\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (c) $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$
(d) $-2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (e) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Nos Exercícios 5 e 6, encontre os componentes do vetor e esboce um vetor equivalente com ponto inicial na origem.

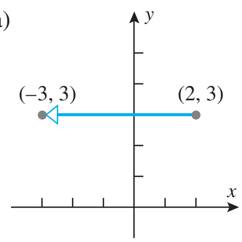
5. (a)



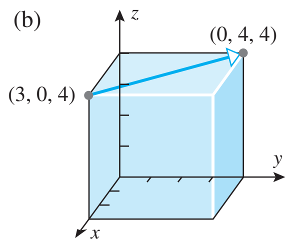
(b)



6. (a)



(b)



Nos Exercícios 7 e 8, encontre os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

7. (a) $P_1(3, 5)$, $P_2(2, 8)$ (b) $P_1(5, -2, 1)$, $P_2(2, 4, 2)$

8. (a) $P_1(-6, 2)$, $P_2(-4, -1)$ (b) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(-1, 6, 1)$

9. (a) Encontre o ponto final do vetor equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ que tem ponto inicial em $A(1, 1)$.
(b) Encontre o ponto inicial do vetor equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ que tem ponto final em $B(-1, -1, 2)$.

10. (a) Encontre o ponto inicial do vetor equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ que tem ponto inicial em $A(2, 0)$.
(b) Encontre o ponto final do vetor equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ que tem ponto inicial em $B(0, 2, 0)$.

11. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4, 3, -5)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(c) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

12. Sejam $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
(c) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

13. Sejam **u**, **v** e **w** os três vetores do Exercício 11. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz a equação $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

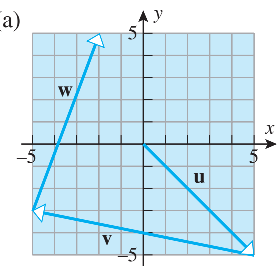
14. Sejam **u**, **v** e **w** os três vetores do Exercício 12. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz a equação $3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{w}$.

15. Qual dos seguintes vetores de R^6 é paralelo a $\mathbf{u} = (-2, 1, 0, 3, 5, 1)$?
(a) $(4, 2, 0, 6, 10, 2)$ (b) $(4, -2, 0, -6, -10, -2)$
(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$

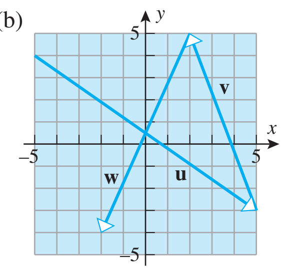
16. Para quais valores de t (se existirem) o vetor dado será paralelo a $\mathbf{u} = (4, -1)$?
(a) $(8t, -2)$ (b) $(8t, 2t)$
(c) $(1, t^2)$

17. Em cada parte, esboce o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e expresse-o em forma de componentes.

(a)



(b)



18. Em cada parte do Exercício 17, esboce o vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$, e expresse-o em forma de componentes.

19. Sejam $\mathbf{u} = (1, -1, 3, 5)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -3)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (1, -4, 9, 18)$.

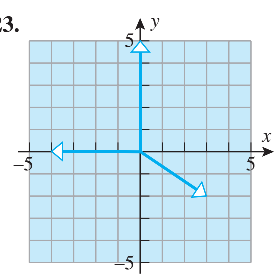
20. Sejam $\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + (-8, 8, 3, -1, 7)$.

21. Esboce três paralelogramos que têm vértices nos pontos $A(0, 0)$, $B = (-1, 3)$ e $C = (1, 2)$.

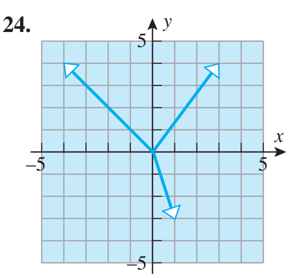
22. Verifique que um dos paralelogramos do Exercício 21 tem o ponto final do vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ como quarto vértice; em seguida, expresse o quarto vértice de cada um dos paralelogramos em termos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Dizemos que uma partícula está em ***equilíbrio estático*** se é nula a soma de todas forças a ela aplicadas. Nos Exercícios 23 e 24, encontre os componentes da força **F** que deve ser aplicada à partícula na origem para que resulte um equilíbrio estático. A força **F** é a única força aplicada à partícula além das forças mostradas, não havendo outras forças presente.

23.

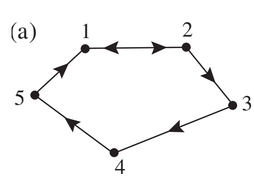


24.

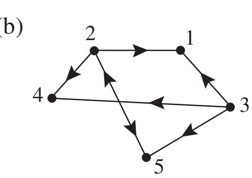


Nos Exercícios 25 e 26, construa uma matriz de adjacência para o grafo direcionado dado.

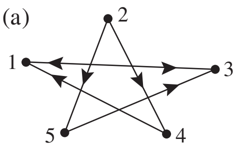
25. (a)



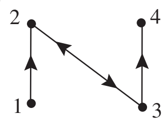
(b)



26. (a)



(b)



Nos Exercícios 27 e 28, construa um grafo direcionado cuja matriz de adjacência é igual à matriz dada.

27. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Discussão e Descoberta

D1. Dê algum exemplo físico de quantidades que podem ser descritas por vetores em R^4.

D2. É o tempo um escalar ou um vetor? Explique sua resposta num texto de um parágrafo.

D3. Se a soma de três vetores em R^3 é zero, é verdade que eles devem estar num mesmo plano? Explique.

D4. Um monge caminha do portão de um monastério até o topo de uma montanha para rezar e retorna ao portão do monastério no dia seguinte. Qual é o deslocamento do monge? Qual é a relação entre o deslocamento do monge indo do portão do monastério até o topo da montanha e o deslocamento indo do topo da montanha de volta até o portão?

D5. Considere o hexágono regular mostrado na figura dada.

(a) Qual é a soma dos seis vetores radiais que ligam o ponto inicial no centro até os vértices?

(b) Qual será o efeito sobre a soma se cada vetor radial for multiplicado por $\frac{1}{2}$?

(c) Qual é a soma dos cinco vetores radiais que excetuando o vetor **a**?

(d) Discuta variações e generalizações do resultado da parte (c).

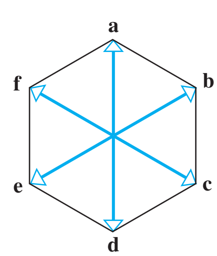


Figura Ex-D5

D6. Qual é a soma de todos os vetores radiais de um polígono regular de n lados? (Ver o Exercício D5.)

D7. Considere um relógio com vetores desenhados desde o centro até cada hora, como na figura dada.

(a) Qual será a soma que resulta dos 12 vetores se o vetor que termina no 12 for dobrado de tamanho e todos os demais forem deixados como estão?

(b) Qual será a soma que resulta dos 12 vetores se os vetores que terminam no 3 e no 9 forem triplicados de tamanho e todos os demais forem deixados como estão?

(c) Qual será a soma que resulta dos 9 vetores que permanecem se removermos os vetores que terminam no 5, 11 e 8?

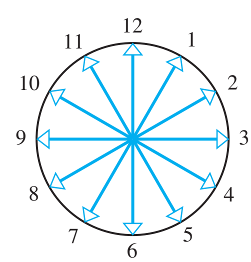


Figura Ex-D7

D8. Esboce uma figura com quatro vetores não-nulos no plano tais um deles é a soma dos outros três.

D9. Indique se a afirmação dada é verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique sua resposta.

(a) Se $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

(b) Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$ para quaisquer a e b.

(c) Vetores paralelos de mesmo comprimento são iguais.

(d) Se $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então ou $a = 0$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(e) Se $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos.

(f) Os vetores $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ são equivalentes.

Trabalhando com Provas

P1. Prove a parte (*e*) do Teorema 1.1.5.

P2. Prove a parte (*f*) do Teorema 1.1.5.

P3. Prove o Teorema 1.1.6 sem utilizar componentes.

Usando Recursos Computacionais

T1. (***Números e operações numéricas***) Descubra como digitar números inteiros, fracionários, decimais e irracionais tais como π e $\sqrt{2}$ em seu recurso computacional. Confira seu entendimento do procedimento para converter π e $\sqrt{2}$ para a forma decimal, exibindo várias casas decimais. Leia sobre os procedimentos para efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação e radiciação. Experimente com números de sua escolha até sentir que está dominando as técnicas.

T2. (***Esboçando vetores***) Descubra como traçar segmentos de reta no espaço bidimensional ou tridimensional e trace alguns segmentos de reta com pontos iniciais e finais à sua escolha. Se o seu recurso computacional permitir a criação de setas, pode fazer seus segmentos de reta parecerem vetores.

T3. (***Operações com vetores***) Descubra como digitar vetores e como calcular somas, diferenças e múltiplos escalares de vetores. Confira seu entendimento destas operações efetuando as contas do Exemplo 4.

T4. Use sua ferramenta para calcular os componentes de
$\mathbf{u} = (7{,}1; -3) - 5(\sqrt{2}, 6) + 3(0, \pi)$ com cinco casas decimais.

Seção 1.2 Produto Escalar e Ortogonalidade

Nesta seção nos ocuparemos dos conceitos de comprimento, ângulo, distância e perpendicularidade em R^n. Começaremos discutindo estes conceitos geometricamente em R^2 e R^3 e depois vamos estendê-los algebricamente ao R^n usando componentes.

NORMA DE UM VETOR

O comprimento de um vetor $\mathbf{v}$ de R^2 ou R^3 é usualmente denotado pelo símbolo $\|\mathbf{v}\|$. Segue pelo Teorema de Pitágoras que o comprimento de um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ de R^2 é dado pela fórmula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

(Figura 1.2.1a). Uma fórmula análoga para o comprimento de um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser obtida com duas aplicações do Teorema de Pitágoras (Figura 1.2.1b):

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Assim,

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2}$$

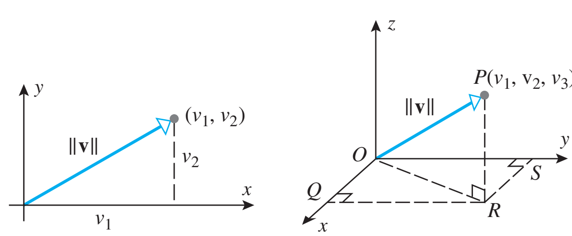


Figura 1.2.1 (a) (b)

As Fórmulas (1) e (2) justificam a definição geral do comprimento de um vetor em R^n.

> **Definição 1.2.1** Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um vetor em R^n, então o ***comprimento*** de $\mathbf{v}$, também denominado ***norma*** de $\mathbf{v}$ ou ***magnitude*** de $\mathbf{v}$, é denotado por $\|\mathbf{v}\|$ e definido pela fórmula
>
> $$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2} \tag{3}$$

EXEMPLO 1 Calculado Normas

Usando (3), a norma do vetor $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ em R^3 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

e a norma do vetor $\mathbf{v} = (2, -1, 3, -5)$ em R^4 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$

■

Como os comprimentos de vetores em R^2 e R^3 são números não-negativos e como $\mathbf{0}$ é o único vetor de comprimento zero, segue que $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ e que $\|\mathbf{v}\| = 0$ se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Também, multiplicando $\mathbf{v}$ pelo escalar k multiplica o comprimento de $\mathbf{v}$ por $|k|$, de modo que $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$. Deixamos a cargo do leitor provar que estas três propriedades também valem em R^n.

Teorema 1.2.2 *Se* $\mathbf{v}$ *é um vetor em* R^n *e se* k *é qualquer escalar, então:*

(*a*) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

(*b*) $\|\mathbf{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(*c*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$

VETORES UNITÁRIOS

Um vetor de comprimento 1 é denominado um ***vetor unitário***. Se $\mathbf{v}$ é um vetor não-nulo em R^n, então um vetor unitário $\mathbf{u}$ que tem a mesma direção e sentido do que $\mathbf{v}$ é dado pela fórmula

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{4}$$

Dita em palavras, a Fórmula (4) afirma que *um vetor unitário de mesma direção e sentido do que um vetor* $\mathbf{v}$ *pode ser obtido multiplicando* $\mathbf{v}$ *pelo recíproco de seu comprimento*. Este processo é denominado ***normalização*** de $\mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido do que $\mathbf{v}$, já que $1/\|\mathbf{v}\|$ é um escalar positivo, e tem comprimento 1, pois a parte (*c*) do Teorema 1.2.2 com $k = 1/\|\mathbf{v}\|$ fornece

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

Às vezes vemos a Fórmula (4) expressa por

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Isto é simplesmente uma maneira mais compacta de escrever a multiplicação por escalar em (4).

EXEMPLO 2
Normalizando um Vetor

Encontre um vetor unitário $\mathbf{u}$ que tem a mesma direção e sentido do que $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$.

Solução O vetor $\mathbf{v}$ tem comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Assim, por (4) temos

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

O leitor pode querer conferir que, de fato, $\mathbf{u}$ é um vetor unitário. ■

PROBLEMA CONCEITUAL Muitas vezes, os vetores unitários são utilizados para especificar direções no plano e no espaço. Encontre um vetor unitário que descreva a direção tomada por um besouro que se desloca ao longo de uma linha reta a partir da origem do sistema de coordenadas xy na direção do primeiro quadrante, fazendo um ângulo de 30º com o eixo x positivo. Também encontre um vetor unitário que descreva a direção tomada pelo mesmo besouro se ele se desloca na direção do terceiro quadrante ao longo da mesma linha reta.

OS VETORES UNITÁRIOS CANÔNICOS

Quando introduzimos um sistema de coordenadas retangulares em R^2 ou R^3, dizemos que os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são os ***vetores unitários canônicos***. No R^2 estes vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1) \tag{5}$$

e em R^3 são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1) \tag{6}$$

(Figura 1.2.2)

Observe que cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em R^2 pode ser expresso em termos dos vetores unitários canônicos como

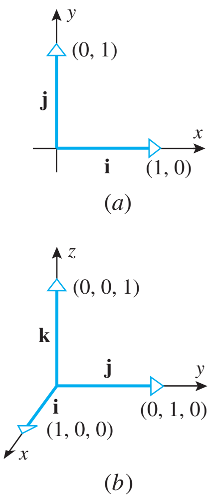


Figura 1.2.2

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

e cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser expresso em termos dos vetores unitários canônicos como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Por exemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

OBSERVAÇÃO A notação **i**, **j**, **k** para vetores de R^2 e R^3 é usual em Engenharia e Física, mas será pouco utilizada neste livro.

Mais geralmente, definimos os ***vetores unitários canônicos de R^n*** por

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \tag{7}$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que cada vetor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso em termos dos vetores unitários canônicos como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \tag{8}$$

DISTÂNCIA ENTRE PONTOS DE R^n

Se P_1 e P_2 são pontos em R^2 ou R^3, então o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância d entre os dois pontos (Figura 1.2.3). Especificamente, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos em R^2, então o Teorema 1.1.1(a) implica

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{9}$$

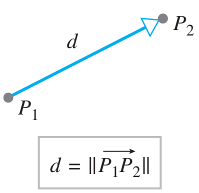


Figura 1.2.3

Esta é a conhecida fórmula da distância da Geometria Analítica. Analogamente, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ do espaço é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{10}$$

Motivados pelas Fórmulas (9) e (10), introduzimos a definição seguinte.

Definição 1.2.3 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são pontos de R^n, então definimos a ***distância*** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre **u** e **v** por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \tag{11}$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$$

então a distância entre **u** e **v** é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$

Deixamos a cargo do leitor utilizar a Fórmula (11) para mostrar que as distâncias em R^n têm as seguintes propriedades.

Teorema 1.2.4 *Se* **u** *e* **v** *são pontos em* R^n*, então*

(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$

(b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

Esse teorema afirma que as distâncias em R^n se comportam como as distâncias nos espaços visíveis, ou seja, as distâncias são números não-negativos, a distância entre pontos distintos é não-nula e a distância é a mesma, tanto se for medida de **u** para **v** quanto de **v** para **u**.

PRODUTOS ESCALARES

Agora definiremos um novo tipo de multiplicação que será útil para encontrar ângulos entre vetores e para determinar se dois vetores são perpendiculares.

Definição 1.2.5 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores em R^n, então o ***produto escalar*** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, também denominado ***produto interno euclidiano*** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido pela fórmula

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{12}$$

Em palavras, *o produto escalar é calculado multiplicando componentes correspondentes dos vetores e somando os produtos resultantes*. Por exemplo, o produto escalar de $\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7)$ e $\mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$ em R^4 é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

OBSERVAÇÃO Note a distinção entre multiplicação *por* escalar e produto escalar: na primeira, um fator é escalar, o outro é vetor, e o resultado é um vetor; na segunda, ambos fatores são vetores e o resultado é um escalar.

EXEMPLO 3 Uma Aplicação do Produto Escalar ao Código ISBN

A maioria dos livros publicados nos últimos 25 anos possui um indicativo numérico utilizado internacionalmente para a identificação de livros, que consiste de dez dígitos, denominado ISBN (das iniciais em inglês, ***International Standard Book Number***). Os nove primeiros dígitos deste número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado *dígito de verificação*, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não há erro de digitação nos nove primeiros, por exemplo, numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela Internet.

Para explicar como isto é feito, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor $\mathbf{b}$ de R^9 e seja $\mathbf{a}$ o vetor

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Então o dígito de verificação c é calculado pelo seguinte processo:

1. Calcule o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. Divida $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ por 11, produzindo um resto c que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais um dígito.

Por exemplo, o ISBN do Novo Aurélio Século 20 é

85-209-1010-6

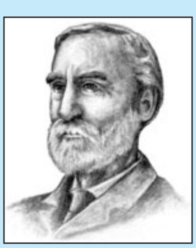
com um dígito de verificação igual a 6. Isto é consistente com os nove primeiros dígitos do ISBN, pois

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \cdot (8, 5, 2, 0, 9, 1, 0, 1, 0) = 83$$

Dividindo 83 por 11 obtemos um quociente de 7 e um resto de 6, de modo que o dígito de verificação é $c = 6$. Se uma loja de uma rede de livrarias encomendar o Aurélio por meio de um pedido transmitido eletronicamente ao depósito, então o depósito pode usar este procedimento para verificar se o dígito de verificação é consistente com os nove primeiros dígitos transmitidos e, assim, reduzir a possibilidade de erro na remessa. ■

A Álgebra Linear na História

A notação de produto escalar foi introduzida pelo matemático e físico norte-americano J. Willard Gibbs num panfleto distribuído entre seus alunos da Universidade de Yale nos anos 1880. Originalmente, o produto era escrito como um ponto final na altura da linha, não centrado verticalmente como hoje em dia, sendo denominado *produto direto*. O panfleto de Gibbs acabou sendo incorporado num livro intitulado *Vector Analysis* que foi publicado em 1901 por Gibbs com co-autoria de um de seus alunos. Gibbs fez contribuições importantes nos campos de Termodinâmica e Eletromagnetismo e é geralmente considerado o maior físico norte-americano do século dezenove.



Josiah Willard Gibbs
(1839-1903)

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO ESCALAR

No caso especial em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ na Definição 1.2.5, obtemos a relação

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \tag{13}$$

Isto fornece a seguinte fórmula para expressar o comprimento de um vetor em termos do produto escalar:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{14}$$

O produto escalar tem muitas das mesmas propriedades algébricas do produto de números reais.

Teorema 1.2.6 *Se* **u**, **v** e **w** *são vetores em* R^n *e se* k *é um escalar, então:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **[Simetria]**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ **[Distributividade]**

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ **[Homogeneidade]**

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ *e* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positividade]**

Vamos provar as partes (*c*) e (*d*) e deixar as outras duas como exercícios.

Prova (c) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Então

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \cdots + (ku_n)v_n = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

Prova (d) O resultado segue das partes (*a*) e (*b*) do Teorema 1.2.2 e do seguinte:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + \cdots + v_nv_n = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$ ■

O próximo teorema dá mais algumas propriedades do produto escalar. Os resultados deste teorema podem ser provados ou expressando os vetores em termos de componentes ou então usando as propriedades algébricas já estabelecidas no Teorema 1.2.6.

Teorema 1.2.7 *Se* **u**, **v** e **w** *são vetores em* R^n *e se* k *é um escalar, então:*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*e*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Mostraremos como o Teorema 1.2.6 pode ser usado para provar a parte (*b*) sem passar para os componentes dos vetores. Algumas das outras quatro partes são deixadas como exercícios.

Prova (b)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) && \textbf{[por simetria]} \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} && \textbf{[por distributividade]} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} && \textbf{[por simetria]}
\end{aligned}$$

As Fórmulas (13) e (14), junto com os Teoremas 1.2.6 e 1.2.7, tornam possível usar as técnicas algébricas usuais para trabalhar com expressões envolvendo o produto escalar.

EXEMPLO 4 Calculando com Produto Escalar

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) - 2\mathbf{v} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) \\
&= 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 6(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\
&= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 8\|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$ ■

ÂNGULO ENTRE VETORES EM R^2 E R^3

Para ver como o produto escalar pode ser usado para calcular ângulos entre vetores em R^2 e R^3, tomemos vetores não-nulos **u** e **v** em R^2 ou R^3 e definamos o ***ângulo*** entre **u** e **v** como o menor ângulo não-negativo θ pelo qual um dos vetores pode ser girado no plano dos dois vetores até sua direção e sentido coincidir com o outro (Figura 1.2.4). Algebricamente, a medida em radianos de θ está no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ e, em R^2, o ângulo θ é gerado com uma rotação anti-horária.

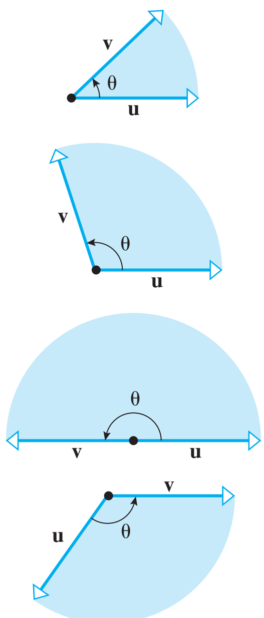


Figura 1.2.4

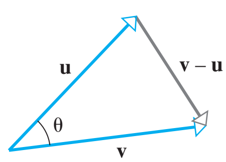


Figura 1.2.5

O próximo teorema fornece uma maneira efetiva de calcular o ângulo entre vetores tanto em R^2 quanto em R^3.

Teorema 1.2.8 *Se* **u** *e* **v** *são vetores não-nulos em* R^2 *ou* R^3 *e se* θ *é o ângulo entre estes vetores, então*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \quad \textit{ou equivalente,} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{15-16}$$

Prova Suponha que os vetores **u**, **v** e **v – u** estejam posicionados de tal modo que formem os lados de um triângulo, como indica a Figura 1.2.5. Segue da lei dos cossenos que

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{17}$$

Usando a Fórmula (13) e as propriedades do produto escalar dos Teoremas 1.2.6 e 1.2.7, podemos reescrever o lado esquerdo desta equação como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})\\ &= (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2\end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em (17) resulta

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

que pode ser escrito, simplesmente, como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Finalmente, dividindo ambos lados desta equação por $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$, obtemos (15). ■

Se **u** e **v** são vetores não-nulos em R^2 ou R^3 e se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, então segue da Fórmula (16) que $\theta = \cos^{-1} 0 = \pi/2$. Reciprocamente, se $\theta = \pi/2$, então $\cos\theta = 0$ e $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Assim, *dois vetores não-nulos em* R^2 *ou* R^3 *são perpendiculares se, e somente se, seu produto escalar é nulo.*

PROBLEMA CONCEITUAL O que pode ser dito sobre o ângulo entre os vetores não-nulos **u** e **v** de R^2 ou R^3 se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$? E se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$?

EXEMPLO 5 Uma Aplicação da Fórmula do Ângulo

Encontre o ângulo θ entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Suponha que o cubo tenha lado a e introduza um sistema de coordenadas retangulares como indica a Figura 1.2.6. Neste sistema de coordenadas, o vetor

$$\mathbf{d} = (a, a, a)$$

é a diagonal do cubo e os vetores $\mathbf{v}_1 = (a, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, a, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, a)$ representam arestas. Por simetria, a diagonal faz o mesmo ângulo com cada aresta, de modo que é suficiente encontrar o ângulo entre **d** e $\mathbf{v}_1$. Pela Fórmula (15), o cosseno deste ângulo é

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{d}\|} = \frac{a^2}{a(\sqrt{3a^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Assim, com a ajuda de uma calculadora, obtemos

$$\theta = \arccos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}7^\circ$$

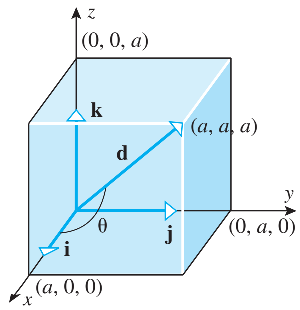


Figura 1.2.6

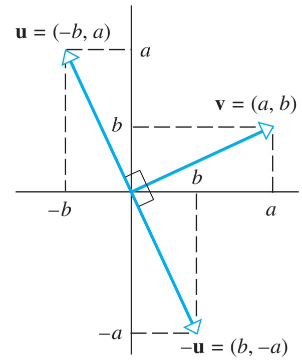


Figura 1.2.7

EXEMPLO 6 Encontrando um Vetor em R^2 que é Perpendicular a um Vetor Dado

Encontre um vetor não-nulo em R^2 que é perpendicular ao vetor não-nulo $\mathbf{v} = (a, b)$.

Solução Queremos encontrar um vetor não-nulo $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. É bastante fácil ver que $\mathbf{u} = (-b, a)$ é um tal vetor, pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-b, a) \cdot (a, b) = -ba + ab = 0$$

O vetor $-\mathbf{u} = (b, -a)$ também é perpendicular a $\mathbf{v}$, bem como qualquer múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ (Figura 1.2.7). ■

ORTOGONALIDADE

Para generalizar a noção de perpendicularidade para R^n, introduzimos a seguinte definição.

> **Definição 1.2.9** Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ditos ***ortogonais*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e um conjunto não-vazio de vetores de R^n é denominado um ***conjunto ortogonal*** se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal.

OBSERVAÇÃO Note que não exigimos que $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ sejam não-nulos nesta definição. Assim, dois vetores em R^2 ou R^3 são ortogonais se, e somente se, são não-nulos e perpendiculares ou então pelo menos um dos dois vetores é nulo.

EXEMPLO 7 Um Conjunto Ortogonal de Vetores de R^4

Mostre que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (-2, 1, -4, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (-4, 2, 2, -1)$$

formam um conjunto ortogonal de R^4.

Solução Por causa da simetria do produto escalar, basta confirmar que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

Deixamos estas contas a cargo do leitor. ■

Se S é um conjunto não-vazio de vetores de R^n e se $\mathbf{v}$ é ortogonal a cada vetor de S, então dizemos que $\mathbf{v}$ é ***ortogonal ao conjunto S***. Por exemplo, o vetor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ de R^3 é ortogonal ao plano xy (Figura 1.2.2b)

EXEMPLO 8 O Vetor Zero é Ortogonal a R^n

A parte (a) do Teorema 1.2.7 afirma que se $\mathbf{0}$ é o vetor nulo em R^n, então $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$ para cada vetor $\mathbf{v}$ de R^n. Assim, $\mathbf{0}$ é ortogonal a R^n. Além disto, $\mathbf{0}$ é o único vetor em R^n que é ortogonal a R^n, pois se $\mathbf{v}$ é um vetor em R^n que é ortogonal a R^n, então, em particular, deveria valer $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$; mas isso implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pela parte (d) do Teorema 1.2.6. ■

OBSERVAÇÃO Embora o resultado do Exemplo 8 possa parecer óbvio, ele será útil mais tarde, pois fornece uma maneira de usar o produto escalar para mostrar que um vetor $\mathbf{w}$ de R^n é nulo: basta mostrar que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$ para cada $\mathbf{v}$ de R^n.

CONJUNTOS ORTONORMAIS

Conjuntos ortogonais de vetores unitários têm importância especial e existe uma nomenclatura associada.

Definição 1.2.10 Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ditos ***ortonormais*** se são ortogonais e têm comprimento 1 e um conjunto de vetores é denominado um ***conjunto ortonormal*** se cada vetor do conjunto tem comprimento 1 e se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal.

EXEMPLO 9 Os Vetores Unitários Canônicos de R^n são Ortonormais

Os vetores unitários canônicos de R^2 ou R^3 formam conjuntos ortonormais, pois estes vetores têm comprimento 1 e estão situados ao longo dos eixos coordenados de um sistema de coordenadas retangulares (Figura 1.2.2). Mais geralmente, os vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

em R^n formam um conjunto ortonormal, pois

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \cdots = \|\mathbf{e}_n\| = 1$$

(verifique). ■

No próximo exemplo temos um conjunto ortonormal de três vetores em R^4.

EXEMPLO 10 Um Conjunto Ortonormal em R^4

Os vetores

$$\mathbf{q}_1 = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \left(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}\right), \quad \mathbf{q}_3 = \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}\right)$$

formam um conjunto ortonormal em R^4, pois

$$\|\mathbf{q}_1\| = \|\mathbf{q}_2\| = \|\mathbf{q}_3\| = 1$$

e

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = 0, \quad \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3 = 0, \quad \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = 0$$

(verifique). ■

GEOMETRIA EUCLIDIANA EM R^n

As expressões nas Fórmulas (3) e (11) são, às vezes, denominadas ***norma euclidiana*** e ***distância euclidiana***, porque fornecem teoremas em R^n que, aplicados a R^2 ou R^3, reduzem a teoremas da Geometria Euclidiana. Três exemplos imediatos são:

1. Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois catetos (Teorema de Pitágoras).
2. A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior do que ou igual ao comprimento do terceiro lado.
3. A menor distância entre dois pontos é medida ao longo de uma linha reta.

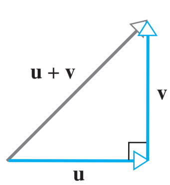


Figura 1.2.8

Para estender estes teoremas ao R^n, precisamos expressá-los em formato vetorial. Por exemplo, um triângulo retângulo em R^2 ou R^3 pode ser construído colocando dois vetores ortogonais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ um com a origem na extremidade do outro e usando o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ como a hipotenusa (Figura 1.2.8). Em notação vetorial, o Teorema de Pitágoras toma a forma

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

O próximo teorema é a extensão deste resultado ao R^n.

Teorema 1.2.11 (*Teorema de Pitágoras*) *Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais em R^n, então*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{18}$$

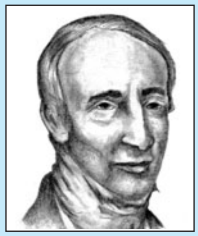
Prova

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

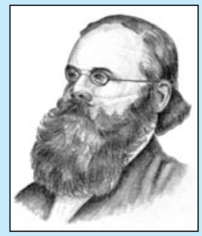
■

A Álgebra Linear na História

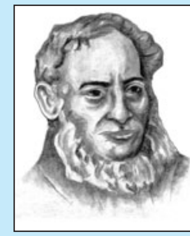
A desigualdade de Cauchy-Schwarz homenageia o matemático francês Augustin Cauchy e o matemático alemão Hermann Schwarz. Variações desta desigualdade aparecem em muitas situações distintas e sob vários nomes. Dependendo do contexto no qual a desigualdade ocorre, pode ser chamada de desigualdade de Cauchy, desigualdade de Schwarz ou até desigualdade de Bunyakovsky, em reconhecimento ao matemático russo que publicou sua versão da desigualdade em 1859, cerca de 25 anos antes de Schwarz.



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)



Hermann Amandus Schwarz
(1843-1921)



Viktor Yakovlevich Bunyakovsky
(1804-1889)

Vimos que o ângulo entre vetores não-nulos em R^2 e R^3 é dado pela fórmula

$$\theta = \arccos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{19}$$

Como esta fórmula envolve unicamente o produto escalar e as normas dos vetores **u** e **v** e como as noções de produto escalar e norma são aplicáveis a vetores de R^n, parece razoável usar a Fórmula (19) como *definição* do ângulo entre dois vetores **u** e **v** em R^n. Contudo, esse plano só terá êxito se for verdade que

$$-1 \le \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1 \tag{20}$$

para quaisquer vetores não-nulos em R^n. O próximo teorema dá um resultado, conhecido como ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz***, que mostra que (20) realmente vale para quaisquer vetores não-nulos em R^n.

Teorema 1.2.12 (***Desigualdade de Cauchy-Schwarz em*** R^n) *Se* **u** *e* **v** *são vetores em* R^n, *então*

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \le \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \tag{21}$$

ou, equivalentemente (tomando raízes quadradas),

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

Prova Inicialmente observe que se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então ambos lados de (21) são nulos e, portanto, a igualdade vale neste caso. Agora considere o caso em que ambos **u** e **v** são não-nulos. Como sugere a Figura 1.2.9, o vetor **v** pode ser escrito como a soma de algum múltiplo escalar de **u**, digamos, $a\mathbf{u}$, e um vetor **w** que é perpendicular a **u**. O escalar a apropriado pode ser computado escrevendo $\mathbf{w} = \mathbf{v} - a\mathbf{u}$ e usando a condição de ortogonalidade $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$ para escrever

$$0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} - a\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \quad(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$$

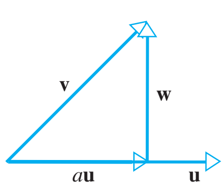


Figura 1.2.9

do que segue que

$$a = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \tag{23}$$

Agora aplique o Teorema de Pitágoras aos vetores da Figura 1.2.9 para obter

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|a\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = a^2\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \tag{24}$$

Substituindo (23) no lugar de a e multiplicando ambos lados da nova equação por $\|\mathbf{u}\|^2$, obtemos (verifique)

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 + \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 \tag{25}$$

Como $\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 \geq 0$, segue de (25) que

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Isso mostra que vale (21) e, portanto, (22). ■

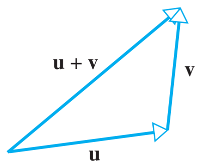


Figura 1.2.10

OBSERVAÇÃO Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos, agora, usar (19) como uma definição do ângulo entre vetores não-nulos de R^n.

Existe um teorema na geometria do plano, denominada ***desigualdade triangular***, que afirma que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior do que ou igual ao comprimento do terceiro lado. O teorema seguinte é uma generalização desse resultado ao R^n (Figura 1.2.10).

Teorema 1.2.13 (*Desigualdade Triangular para Vetores*) *Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n, *então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \tag{26}$$

Prova

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 && \textbf{[Propriedade do valor absoluto]}\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \textbf{[Desigualdade de Cauchy-Schwarz]}\\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

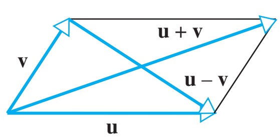


Figura 1.2.11

A Fórmula (26) segue, agora, de tomar as raízes quadradas. ■

Existe um teorema na geometria do plano que afirma que a soma dos quadrados dos comprimentos das duas diagonais de qualquer paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos quatro lados. O teorema seguinte é uma generalização desse resultado ao R^n (Figura 1.2.11).

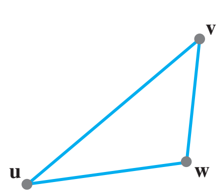
Teorema 1.2.14 (*Lei do Paralelogramo para Vetores*) *Se* **u** *e* **v** *são vetores em* R^n, *então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) \tag{27}$$

Prova

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

■



$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$

Figura 1.2.12

Finalmente, sejam **u** e **v** dois pontos quaisquer de R^2 ou R^3. Dizer que a menor distância entre **u** e **v** é medida ao longo de uma linha reta implica que se escolhermos um terceiro ponto **w** em R^2 ou R^3, então

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$$

(Figura 1.2.12). Isso é denominado a ***desigualdade triangular para distâncias*** e o próximo teorema estende isso ao R^n.

Teorema 1.2.15 (*Desigualdade Triangular para Distâncias*) *Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n, *então*

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v}) \tag{28}$$

Prova

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \\ &= \|(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})\| && \textbf{[Some e subtraia w]} \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| && \textbf{[Desigualdade triangular para vetores]} \\ &= d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) && \textbf{[Definição de distância]} \end{aligned}$$

■

OLHANDO À FRENTE As noções de comprimento, ângulo e distância em R^n podem todas ser expressas em termos do produto escalar (mais precisamente, do *produto interno euclidiano*):

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{29}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}\right) \tag{30}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})} \tag{31}$$

Assim, são as propriedades algébricas do produto escalar que acabam determinando as propriedades geométricas dos vetores de R^n. Contudo, todas as propriedades algébricas mais importantes do produto escalar podem ser deduzidas das quatro propriedades do Teorema 1.2.6, de modo que esse teorema é realmente a pedra fundamental da construção da geometria de R^n. Como o espaço R^n, munido do produto escalar, tem tantas das propriedades familiares da Geometria Euclidiana, ele é, muitas vezes, denominado ***espaço euclidiano de dimensão n*** ou ***espaço euclidiano n-dimensional***.

Exercícios 1.2

Nos Exercícios 1 e 2, encontre a norma de $\mathbf{v}$, um vetor unitário de mesma direção e sentido do que $\mathbf{v}$ e um vetor unitário de sentido oposto ao de $\mathbf{v}$.

1. (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

2. (a) $\mathbf{v} = (-5, 12)$ (b) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (-2, 3, 3, -1)$

Nos Exercícios 3 e 4, calcule a expressão dada tomando $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$.

3. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
(c) $\|-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|$ (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

4. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
(c) $\|3\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ (d) $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

Nos Exercícios 5 e 6, calcule a expressão dada tomando $\mathbf{u} = (-2, -1, 4, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5, 7)$ e $\mathbf{w} = (-6, 2, 1, 1)$.

5. (a) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|3\mathbf{u}\| - 5\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
(c) $\|-\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}\|$

6. (a) $\|\mathbf{u}\| - 2\|\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|-2\mathbf{v}\| + \|-3\mathbf{w}\|$
(c) $\big\|\,\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\big\|$

7. Seja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$. Encontre todos escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.

8. Seja $\mathbf{v} = (1, 1, 2, -3, 1)$. Encontre todos escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.

Nos Exercícios 9 e 10, encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

9. (a) $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -4)$
(b) $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 3, -2)$

10. (a) $\mathbf{u} = (1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 5, 1)$
(b) $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

Nos Exercícios 11 e 12, encontre a distância euclidiana entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

11. (a) $\mathbf{u} = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$
(b) $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$
(c) $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3, 13, 5)$,
$\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0, -11, 4)$

12. (a) $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 0)$, $\mathbf{v} = (5, 1, 2, -2)$
(b) $\mathbf{u} = (2, -1, -4, 1, 0, 6, -3, 1)$,
$\mathbf{v} = (-2, -1, 0, 3, 7, 2, -5, 1)$
(c) $\mathbf{u} = (0, 1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1, 3)$

13. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores em cada item do Exercício 11 e depois decida se o ângulo é agudo, obtuso ou reto.

14. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores em cada item do Exercício 12 e depois decida se o ângulo é agudo, obtuso ou reto.

15. Um vetor $\mathbf{a}$ do plano xy tem comprimento de 9 unidades e aponta na direção e sentido que está a 120º anti-horários a partir do eixo x positivo e um vetor $\mathbf{b}$ naquele plano tem um comprimento de 5 unidades e aponta da direção y positiva. Encontre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

16. Um vetor $\mathbf{a}$ do plano xy aponta na direção e sentido que está a 47º anti-horários a partir do eixo x positivo e um vetor $\mathbf{b}$ naquele plano que aponta da direção e sentido a 43º horários a partir do eixo x positivo. O que pode ser dito sobre o valor de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?

17. Resolva a equação $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}$, sabendo que $\mathbf{v} = (1, 2, -4, 0)$ e $\mathbf{w} = (-3, 5, 1, 1)$.

18. Resolva a equação $5\mathbf{x} - \|\mathbf{v}\|\mathbf{v} = \|\mathbf{w}\|(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}$ com $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores dados no Exercício 17.

Nos Exercícios 19 e 20, determine se a expressão dada faz sentido matemático. Se não fizer sentido, explique por quê.

19. (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (d) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \|\mathbf{u}\|$

20. (a) $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{w}$
(c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - k$ (d) $k \cdot \mathbf{u}$

Nos Exercícios 21 e 22, verifique que vale a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

21. (a) $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$
(b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
(c) $\mathbf{u} = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$

22. (a) $\mathbf{u} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$
(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 5, -2)$
(c) $\mathbf{u} = (1, 3, 5, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 4, 1, 3, 5)$

Nos Exercícios 23 e 24, mostre que os vetores dados formam um conjunto ortonormal.

23. $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$,
$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $\mathbf{v}_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$

24. $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

25. Encontre dois vetores que são ortogonais ao vetor não-nulo $\mathbf{u} = (a, b)$.

26. Para quais valores de k, se houver, são $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ortogonais?
(a) $\mathbf{u} = (2, k, k)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$
(b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

27. Para quais valores de k, se houver, são $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ortogonais?
(a) $\mathbf{u} = (k, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$
(b) $\mathbf{u} = (-2, k, k)$, $\mathbf{v} = (k, 5, k)$

28. Use vetores para encontrar os cossenos dos ângulos interiores do triângulo de vértices $A(0, -1)$, $B(1, -2)$ e $C(4, 1)$.

29. Use vetores para mostrar que $A(3, 0, 2)$, $B(4, 0, 3)$ e $C(8, 1, -1)$ são os vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?

É muito conveniente ter uma maneira mais compacta de escrever expressões como $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ e $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, que surgem no estudo de vetores em R^n. Para este propósito, vamos utilizar a ***notação sigma*** (também denominada ***notação de somatório***), que usa a letra grega maiúscula Σ (sigma maiúsculo) para indicar que está sendo feita uma soma. Para ilustrar com funciona a notação, considere a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

na qual cada parcela é da forma k^2, onde k é um inteiro entre 1 e 5, inclusive. Na notação sigma, esta soma pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

Essa expressão nos solicita formar a soma dos termos que resultam quando substituímos sucessivos inteiros no lugar de k, começando com $k = 1$ e terminando com $k = 5$. Em geral, se $f(k)$ é uma função de k e se m e n são inteiros com $m \leq n$, então

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Essa é a soma das parcelas que resultam substituindo sucessivos inteiros no lugar de k, começando em $k = m$ e terminando em $k = n$. O número m é o ***limite inferior de somatório***, o número n é o ***limite superior de somatório*** e a letra k é o ***índice do somatório***. Não é essencial usar k como índice de somatório; qualquer letra pode ser usada, mas neste livro, em geral, utilizamos i, j ou k. Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores em R^n, então a norma de $\mathbf{u}$ e o produto escalar de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$ podem ser escritos na notação sigma como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_kv_k$$

30. Em cada parte, determine se o número dado é um ISBN válido conferindo seu dígito de verificação.
(a) 1-56592-170-7 (b) 0-471-05333-5

31. Em cada parte, determine se o número dado é um ISBN válido conferindo seu dígito de verificação.
(a) 0-471-06368-1 (b) 0-13-947752-3

32. (*Notação sigma*) Em cada parte, escreva a soma usando a notação sigma.
(a) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$
(b) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2$
(c) $b_3 + b_4 + \cdots + b_n$

33. (*Notação sigma*) Escreva a Fórmula (11) usando a notação sigma.

34. (*Notação sigma*) Em cada parte, calcule a soma dada tomando

$$c_1 = 3, c_2 = -1, c_3 = 5, c_4 = -6, c_5 = 4$$

$$d_1 = 6, d_2 = 0, d_3 = 7, d_4 = -2, d_5 = -3$$

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} c_k + \sum_{k=2}^{5} d_k$ (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} (2c_j - d_j)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k c_k$

35. (*Notação sigma*) Em cada parte, confirme a afirmação expandindo as somas de ambos lados.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

Discussão e Descoberta

D1. Escreva um texto de um parágrafo explicando algumas das semelhanças e diferenças entre espaços visíveis e espaços de dimensões superiores. Inclua uma explicação da terminologia *espaço euclidiano* para o R^n.

D2. O que pode ser dito sobre k e $\mathbf{v}$ se $\|k\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\|$?

D3. (a) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos vetores em R^2 que são ortogonais a um dado vetor não-nulo?

(b) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos vetores em R^3 que são ortogonais a um dado vetor não-nulo?

(c) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos vetores em R^2 que são ortogonais a dois vetores não-colineares dados?

(d) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos vetores em R^3 que são ortogonais a dois vetores não-colineares dados?

D4. Mostre que $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ são vetores ortonormais e encontre um terceiro vetor $\mathbf{v}_3$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto ortonormal.

D5. Alguma coisa está errada numa das expressões a seguir. Qual é e o que está errado?

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

D6. Sejam $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Escreva uma igualdade ou desigualdade envolvendo normas que descreve

(a) a circunferência de raio 1 centrado em $\mathbf{x}_0$;

(b) o conjunto de pontos dentro da circunferência da parte (a);

(c) o conjunto de pontos fora da circunferência da parte (a).

D7. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais de R^n tais que $\|\mathbf{u}\| = 1$ e $\|\mathbf{v}\| = 1$, então $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$ ________. Esboce uma figura para ilustrar seu resultado em R^2.

D8. Em cada parte, encontre $\|\mathbf{u}\|$ para $n = 5$, 10 e 100.

(a) $\mathbf{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n})$

(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 3, \ldots, n)$

[*Sugestão*: Use as fórmulas (16) e (17) da Seção 3.7 adiante para a soma dos n primeiros inteiros positivos e para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos.]

D9. Indique se a afirmação dada é verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique sua resposta.

(a) Se $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

(b) Se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

(c) Se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$.

(d) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \neq 0$, então $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

(e) Se $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 0$, então $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

(f) Cada conjunto ortonormal de vetores em R^n é, também, um conjunto ortogonal.

D10. Indique se a afirmação dada é verdadeira (V) ou falsa (F). Justifique sua resposta.

(a) Se $a\mathbf{u} = 0$, então ou $a = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) Se dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^2 são ortogonais a um vetor não-nulo $\mathbf{w}$ em R^2, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são múltiplos escalares um do outro.

(c) Existe um vetor $\mathbf{u}$ em R^3 tal que $\|\mathbf{u} - (1, 1, 1)\| \leq 3$ e $\|\mathbf{u} - (-1, -1, -1)\| \leq 3$.

(d) Se $\mathbf{u}$ é um vetor em R^3 que é ortogonal aos vetores (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1), então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(e) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$.

(f) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Trabalhando com Provas

P1. Prove que se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ são vetores de R^n dois a dois ortogonais, então

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{u}_n\|^2$$

Isso generaliza o Teorema 1.2.11 e, portanto, é denominado ***Teorema de Pitágoras Generalizado***.

P2. (a) Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que se a_1 e a_2 são números não-negativos, então

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

A expressão à esquerda é denominada ***média geométrica*** de a_1 e a_2 e a expressão à direita é a conhecida ***média aritmética*** de a_1 e a_2, de modo que esta fórmula afirma que a média geométrica de dois números não pode ser maior do que sua média aritmética. [*Sugestão*: Considere os vetores $\mathbf{u} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{a_2}, \sqrt{a_1})$.]

(b) Generalize o resultado da parte (a) para n números não-negativos.

P3. Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

P4. (a) Prove a identidade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ para vetores em R^n, expressando ambos lados em termos de produto escalar.

(b) Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, sabendo que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 1$ e $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 5$.

P5. Lembre que duas retas não-verticais no plano são perpendiculares se, e somente se, o produto de suas inclinações é –1. Prove isto utilizando produto escalar. Comece provando que se um vetor não-nulo $\mathbf{u} = (a, b)$ é paralelo a uma reta de inclinação m, então $b/a = m$.

P6. Prove o Teorema 1.2.4 utilizando a Fórmula (11).

P7. (a) Prove a parte (*a*) do Teorema 1.2.6.

(b) Prove a parte (*b*) do Teorema 1.2.6.

P8. (a) Use o Teorema 1.2.6 para provar a parte (*e*) do Teorema 1.2.7 sem decompor os vetores em componentes.

(b) Use o Teorema 1.2.6 e o fato $\mathbf{0} = (0)\mathbf{0}$ para provar a parte (*a*) do Teorema 1.2.7 sem decompor os vetores em componentes.

P9. Considere um triângulo AXB inscrito numa circunferência, de tal modo que um lado coincide com um diâmetro, conforme figura dada. Expresse os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ em termos dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$ e então use o produto escalar para provar que o ângulo em X é reto.

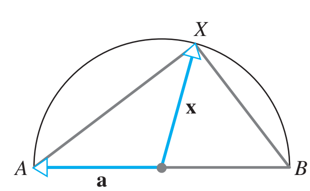


Figura Ex-P9

Usando Recursos Computacionais

T1. (***Produto escalar e norma***) Alguns programas de Álgebra Linear fornecem comandos para calcular produtos escalares e normas e outros fornecem somente um comando para o produto escalar. Neste último caso, as normas podem ser calculadas pela fórmula $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$. Determine como calcular produtos escalares e normas com sua ferramenta e efetue as contas dos Exemplos 1, 2 e 4.

T2. (***Notação sigma***) Determine como calcular expressões envolvendo a notação sigma e calcule

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^3$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2\cos(k\pi)$

T3. (a) Encontre o seno e o cosseno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (1, -2, 4, 1)$ e $\mathbf{v} = (7, 4, -3, 2)$.

(b) Encontre o ângulo entre os vetores da parte (a).

T4. Use o método do Exemplo 5 para calcular os ângulos que a diagonal faz com as arestas de uma caixa de lados retangulares de dimensões 10 cm × 15 cm × 25 cm.

T5. (***Notação sigma***) Seja **u** o vetor de R^{100} cujo i-ésimo componente é i e seja **v** o vetor em R^{100} cujo i-ésimo componente é $1/(i+1)$. Calcule o produto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ escrevendo-o primeiro na notação sigma.

Seção 1.3 Equações Vetoriais de Retas e Planos

Nesta seção, obteremos equações vetoriais para retas e planos em R^2 e R^3 e, em seguida, utilizaremos estas equações como base para a definição de retas e planos em espaços de dimensões superiores.

EQUAÇÕES VETORIAIS E PARAMÉTRICAS DE RETAS

Lembre que a ***equação geral da reta*** em R^2 tem a forma

$$Ax + By = C \text{ (com } A \text{ e } B \text{ não ambos nulos)} \quad (1)$$

No caso especial em que a reta passa pela origem, esta equação simplifica para

$$Ax + By = 0 \text{ (com } A \text{ e } B \text{ não ambos nulos)} \quad (2)$$

Embora sejam úteis, estas equações são aplicáveis somente em R^2, de modo que nosso primeiro objetivo nesta seção será determinar equações de retas aplicáveis tanto a R^2 quanto a R^3.

Uma reta em R^2 ou R^3 pode ser determinada de modo único especificando um ponto $\mathbf{x}_0$ na reta e um vetor não-nulo **v** que é paralelo à reta (Figura 1.3.1*a*). Assim, se **x** é qualquer ponto da reta que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0$ e que é paralela a **v**, então o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ é paralelo a **v** (Figura 1.3.1*b*), de modo que

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{v}$$

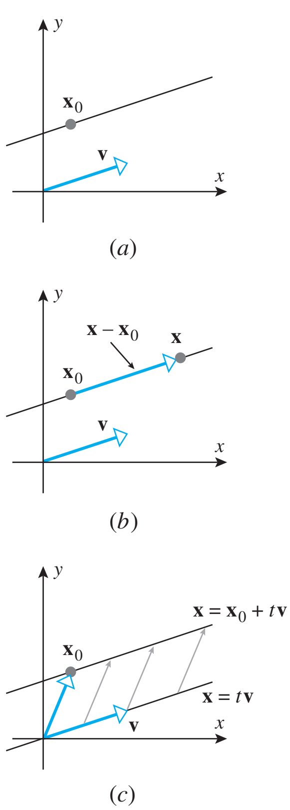


Figura 1.3.1

para algum escalar t. Isto pode ser reescrito como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \quad (3)$$

À medida que a variável t, que é denominada um ***parâmetro***, varia de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto **x** percorre a reta e, portanto, podemos representar esta reta por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (4)$$

Dizemos que esta é uma ***equação vetorial da reta*** pelo ponto $\mathbf{x}_0$ que é paralela a **v**. No caso especial em que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, a reta passa pela origem e (4) simplifica para

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (5)$$

Observe que a reta em (4) é a ***translação*** por $\mathbf{x}_0$ da reta em (5) (Figura 1.3.1*c*).

Uma equação vetorial de uma reta pode ser decomposta em uma coleção de equações escalares igualando componentes correspondentes; assim obtemos ***equações paramétricas*** da reta. Por exemplo, se escrevemos $\mathbf{x} = (x, y)$ para um ponto arbitrário da reta pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ que é paralela a $\mathbf{v} = (a, b)$, então (4) pode ser expressa, em termos de componentes, como

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Obtemos equações paramétricas igualando componentes correspondentes, ou seja,

$$x = x_0 + at, \; y = y_0 + bt \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (6)$$

Analogamente, se escrevemos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ para um ponto arbitrário da reta pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ que é paralela a $\mathbf{v} = (a, b, c)$, então (4) pode ser expressa, em termos de componentes, como

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Obtemos equações paramétricas igualando componentes correspondentes, ou seja,

$$x = x_0 + at, \;\; y = y_0 + bt, \;\; z = z_0 + ct \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{7}$$

OBSERVAÇÃO Para simplificar a escrita, costumamos omitir a referência explícita ao fato $-\infty < t < +\infty$ quando escrevemos equações paramétricas de retas.

EXEMPLO 1
Equações Vetoriais de Retas

(a) Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas da reta em R^2 que passa pela origem e que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (-2, 3)$.
(b) Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas da reta em R^3 que passa pela origem $P_0(1, 2, -3)$ e que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (4, -5, 1)$.
(c) Use a equação vetorial obtida em (b) para encontrar dois pontos da reta distintos de P_0.

Solução (a) Por (5) temos que uma equação vetorial da reta é $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$. Escrevendo $\mathbf{x} = (x, y)$, esta equação pode ser escrita, em forma de componentes, como

$$(x, y) = t(-2, 3)$$

Igualando os componentes correspondentes de ambos lados desta equação, obtemos equações paramétricas

$$x = -2t, \;\; y = 3t$$

Solução (b) Por (4) temos que uma equação vetorial da reta é $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$. Escrevendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e tomando $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$, essa equação pode ser escrita, em forma de componentes, como

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, -5, 1) \tag{8}$$

Igualando os componentes correspondentes de ambos lados desta equação, obtemos equações paramétricas

$$x = 1 + 4t, \;\; y = 2 - 5t, \;\; z = -3 + t$$

Solução (c) Substituindo o parâmetro t por valores numéricos, podemos obter pontos específicos de uma reta dada em equações vetoriais ou paramétricas. Assim, tomando $t = 0$ em (8), obtemos o ponto $(x, y, z) = (1, 2, -3)$, que é o ponto P_0 dado. Outros valores de t fornecem outros pontos; por exemplo, $t = 1$ dá o ponto $(5, -3, -2)$ e $t = -1$ dá o ponto $(-3, 7, -4)$. ■

RETAS POR DOIS PONTOS

Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ são pontos distintos em R^2 ou R^3, então a reta determinada por estes pontos é paralela ao vetor $\mathrm{v} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ (Figura 1.3.2), de modo que por (4) vemos que a reta pode ser expressa em forma vetorial por

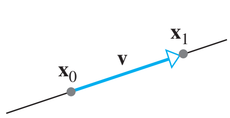


Figura 1.3.2

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{9}$$

ou, equivalentemente, por

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{10}$$

As equações (9) e (10) são ***equações vetoriais da reta que passa pelos dois pontos*** $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$.

OBSERVAÇÃO Restringindo o parâmetro t em (9) ou (10) ao intervalo $0 \leq t \leq 1$, obtemos uma equação do ***segmento de reta*** de $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_1$ em vez de toda a reta (ver Exercícios 41-45).

EXEMPLO 2
Equações Vetoriais e Paramétricas de Retas por Dois Pontos

Encontre equações paramétricas da reta em R^2 que passa pelos pontos $P(0, 7)$ e $Q(5, 0)$.

Solução Escrevendo $\mathbf{x} = (x, y)$, segue de (10), com $\mathbf{x}_0 = (0, 7)$ e $\mathbf{x}_1 = (5, 0)$, que uma equação vetorial da reta que passa pelos dois pontos é

$$(x, y) = (1 - t)(0, 7) + t(5, 0) \tag{11}$$

Igualando os componentes correspondentes, obtemos equações paramétricas

$$x = 5t, \quad y = 7 - 7t \tag{12}$$

(verifique). ■

OBSERVAÇÃO Se tivéssemos tomado $\mathbf{x}_0 = (5, 0)$ e $\mathbf{x}_1 = (0, 7)$ no último exemplo, as equações vetoriais resultantes teriam sido

$$(x, y) = (1 - t)(5, 0) + t(0, 7) \tag{13}$$

e as equações paramétricas correspondentes teriam sido

$$x = 5 - 5t, \quad y = 7t \tag{14}$$

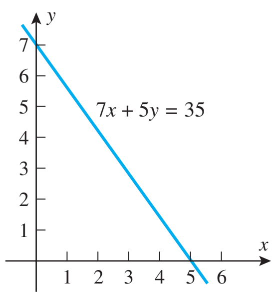


Figura 1.3.3

(verifique). Embora (13) e (14) pareçam diferentes de (11) e (12), todas representam a mesma reta geométrica. Isso pode ser verificado eliminando o parâmetro t das equações paramétricas e encontrando relações diretas entre as variáveis x e y. Por exemplo, resolvendo a primeira equação em (12) para t em termos de x e substituindo na segunda equação, obtemos

$$7x + 5y = 35$$

(verifique). A mesma equação é obtida resolvendo a segunda equação em (14) para t em termos de y e substituindo na primeira equação (verifique), de modo que ambas (12) e (14) representam a mesma reta geométrica (Figura 1.3.3).

EQUAÇÕES PONTO-NORMAIS DE PLANOS

Um plano em R^3 pode ser determinado de modo único especificando um ponto $\mathbf{x}_0$ no plano e um vetor *não-nulo* $\mathbf{n}$ que é perpendicular ao plano (Figura 1.3.4*a*). Dizemos que o vetor $\mathbf{n}$ é ***normal*** ao plano. Se $\mathbf{x}$ é um ponto qualquer deste plano, então o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ é ortogonal a $\mathbf{n}$ (Figura 1.3.4*b*), de modo que

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0} \tag{15}$$

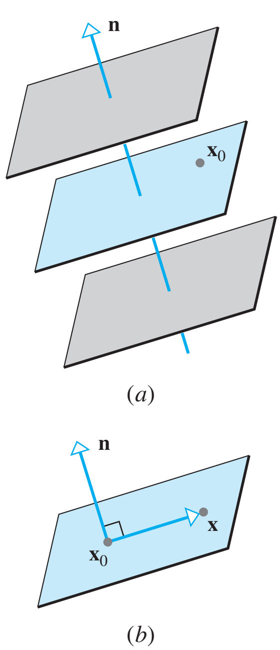


Figura 1.3.4

Reciprocamente, qualquer ponto $\mathbf{x}$ que satisfaz esta equação está neste plano, ou seja, (15) é a equação do plano que passa por $\mathbf{x}_0$ com normal $\mathbf{n}$. Escrevendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ para um ponto arbitrário do plano que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com normal $\mathbf{n} = (A, B, C)$, obtemos (15) em termos de componentes, ou seja,

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \tag{16}$$

onde A, B e C não são todos nulos. Dizemos que esta é uma ***equação ponto-normal*** do plano que passa por $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem normal $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Quando é conveniente, multiplicamos os termos do lado esquerdo de (16) e reescrevemos a equação como

$$\boxed{Ax + By + Cz = D \quad (A, B \text{ e } C \text{ não todos nulos})} \tag{17}$$

Dizemos que esta é a ***equação geral*** de um plano.

No caso especial em que $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ (ou seja, o plano passa pela origem), as Equações (15) e (17) simplificam para

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0} \tag{18}$$

e

$$\boxed{Ax + By + Cz = 0 \quad (A, B \text{ e } C \text{ nem todos são nulos})} \tag{19}$$

respectivamente.