19 Análise por Variáveis de Estado

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

- A apresentação do Conceito das Variáveis de Estado e das Equações na Forma Normal
- O Aprendizado de Como Escrever um Conjunto Completo de Equações na Forma Normal para um Dado Circuito
- A Solução de Equações de Circuitos Utilizando Matrizes
- O Desenvolvimento de uma Técnica Geral Aplicável a Problemas de Ordem Mais Elevada

INTRODUÇÃO

Até agora, vimos vários métodos diferentes pelos quais circuitos poderiam ser analisados. O circuito resistivo veio primeiro, e para ele escrevemos um conjunto de equações algébricas, muitas vezes colocadas na forma de equações nodais ou de malha. Entretanto, no Apêndice 1 aprendemos que podemos escolher outras variáveis de tensão ou corrente mais convenientes com o traçado de uma árvore apropriada para a rede. As árvores aparecem novamente neste capítulo, na seleção das variáveis do circuito.

Em seguida, adicionamos indutores e capacitores em nossas redes, e isto produziu equações contendo derivadas e integrais em relação ao tempo. Exceto pelos sistemas simples de primeira e de segunda ordem que eram livres de fontes ou continham apenas fontes cc, não tentamos resolver essas equações. Subsequentemente, exploramos o uso de fasores para determinar a resposta desses circuitos em regime permanente senoidal, e um pouco mais tarde fomos apresentados ao conceito da frequência complexa e ao método da transformada de Laplace.

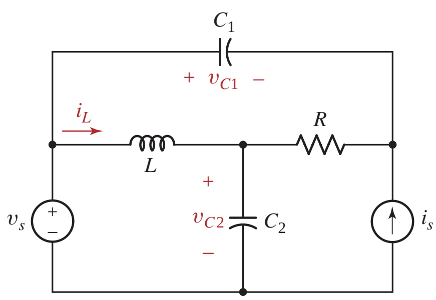
Neste último capítulo, voltamos ao domínio do tempo e apresentamos o uso das variáveis de estado. Novamente, não vamos obter muitas soluções explícitas nem mesmo para circuitos de complexidade moderada, mas escreveremos conjuntos de equações compatíveis com as técnicas de análise numérica.

19.1 ▸ VARIÁVEIS DE ESTADO E EQUAÇÕES NA FORMA NORMAL

A análise por variáveis de estado, ou análise por espaço de estados, como é às vezes chamada, é um procedimento que pode ser aplicado em circuitos lineares e, com algumas modificações, em alguns circuitos não lineares, bem como em circuitos contendo parâmetros variáveis com o tempo, como a capacitância $C = 50 \cos 20t$ pF. Nossa atenção, contudo, ficará restrita a circuitos lineares invariantes com o tempo.

Vamos apresentar algumas das ideias por trás das variáveis de estado olhando para o circuito *RLC* desenhado na Figura 19.1. Ao escrever equações para esse circuito, poderíamos usar a análise nodal, sendo as duas variáveis dependentes as tensões nodais nos nós do centro e da direita. Também poderíamos optar pela análise de malha e usar duas correntes como variáveis, ou, alternativamente, poderíamos desenhar primeiro uma árvore e então selecionar um conjunto de tensões de ramo de árvore ou de correntes de elo como as variáveis dependentes. É possível que cada abordagem leve a um número diferente de variáveis, embora pareça que “dois” pareça ser o número mais provável para esse circuito.

O conjunto de variáveis que selecionamos na análise por variáveis de estado é um conjunto híbrido que pode incluir tanto correntes quanto tensões. Esse conjunto envolve *correntes em indutores* e *tensões em capacitores*. Cada uma dessas grandezas pode ser usada diretamente para expressar a energia armazenada no indutor e no capacitor em cada instante de tempo. Isto é, elas descrevem coletivamente o *estado de energia* do sistema, e por essa razão são chamadas de *variáveis de estado*.



▲ **FIGURA 19.1** Um circuito *RLC* com quatro nós.

Aqui nós estamos usando o símbolo ′ para denotar a derivada em relação ao tempo.

Vamos tentar escrever um conjunto de equações para o circuito da Figura 19.1 em termos das variáveis de estado i_L, v_{C1} e v_{C2}, definidas no diagrama do circuito. O método que vamos usar é apresentado de maneira mais formal na seção a seguir, mas por agora vamos tentar usar a LKT uma vez para cada indutor e a LKC para cada capacitor.

Começando com o indutor, igualamos a zero a soma das tensões em torno da malha inferior esquerda:

$$Li'_L + v_{C2} - v_s = 0 \qquad [1]$$

Presumimos que a tensão v_s da fonte e que a corrente i_s da fonte sejam conhecidas, e temos portanto apenas uma equação em termos de nossas variáveis de estado escolhidas.

Em seguida, consideramos o capacitor C_1. Como o terminal esquerdo de C_1 também é o terminal de uma fonte de tensão, ele se tornará parte de um supernó. Portanto, selecionamos o terminal direito de C_1 como o nó onde aplicaremos a LKC. A corrente no ramo do capacitor é $C_1v'_{C1}$, a corrente na fonte é i_s (subindo), e a corrente em R é obtida ao percebermos que a queda de tensão em R, com sinal positivo no terminal da esquerda, é igual a $(v_{C2} - v_s + v_{C1})$, e que, portanto, a corrente da esquerda para a direita em R é $(v_{C2} - v_s + v_{C1})/R$. Logo,

$$C_1v'_{C1} + \frac{1}{R}(v_{C2} - v_s + v_{C1}) + i_s = 0 \qquad [2]$$

Pudemos novamente escrever uma equação sem introduzir nenhuma variável nova, embora pudéssemos não conseguir expressar a corrente em R diretamente em termos das variáveis de estado se o circuito fosse ligeiramente mais complicado.

Finalmente, aplicamos a LKC no terminal superior de C_2:

$$C_2v'_{C2} - i_L + \frac{1}{R}(v_{C2} - v_s + v_{C1}) = 0 \qquad [3]$$

As Equações [1] a [3] estão escritas unicamente em termos das três variáveis de estado, dos valores conhecidos dos elementos e das duas funções forçantes conhecidas. Elas não estão, contudo, escritas na forma padronizada exigida pela análise por variáveis de estado. Diz-se que as equações de estado estão na *forma normal* quando a derivada de cada variável de estado é expressa como uma combinação linear de todas as variáveis de estado e funções forçantes. A ordem das equações que definem as derivadas e a ordem na qual as variáveis de estado aparecem em cada equação devem ser as mesmas. Vamos selecionar arbitrariamente a ordem i_L, v_{C1}, v_{C2} e reescrever a Equação [1] como

$$i'_L = -\frac{1}{L}v_{C2} + \frac{1}{L}v_s \qquad [4]$$

Então, a Equação [2] é rescrita como

$$v'_{C1} = -\frac{1}{RC_1}v_{C1} - \frac{1}{RC_1}v_{C2} + \frac{1}{RC_1}v_s - \frac{1}{C_1}i_s \qquad [5]$$

enquanto a Equação [3] se torna

$$v'_{C2} = \frac{1}{C_2}i_L - \frac{1}{RC_2}v_{C1} - \frac{1}{RC_2}v_{C2} + \frac{1}{RC_2}v_s \qquad [6]$$

Note que essas equações definem, em ordem, as variáveis de estado i'_L, v'_{C1} e v'_{C2}, com uma ordem correspondente de variáveis nos lados direitos, i_L, v_{C1} e v_{C2}. As funções forçantes vêm por último e podem ser escritas em qualquer ordem conveniente.

Como um outro exemplo da determinação de um conjunto de equações na forma normal, olhemos para o circuito mostrado na Figura 19.2*a*. Como o circuito tem um capacitor e um indutor, esperamos ter duas variáveis de estado, a tensão no capacitor e a corrente no indutor. Para facilitar a escrita das equações na forma normal, vamos construir uma árvore para esse circuito seguindo todas as regras para a construção de árvores discutidas no Apêndice 1, requerendo, além disso, que todos os capacitores estejam localizados na árvore e todos os indutores, na co-árvore. Isto é usualmente possível e leva a uma *árvore normal*. Nos poucos casos excepcionais onde não for possível desenhar uma árvore normal, usaremos um método ligeiramente diferente que é apresentado no final da Seção 19.2. Aqui, conseguimos colocar C na árvore e L e i_s na co-árvore, como mostrado na Figura 19.2*b*. Esta é a única árvore normal possível para esse circuito. As grandezas de fonte e as variáveis de estado estão indicadas na árvore e na co-árvore.

Em seguida, determinamos a corrente em cada elo e a queda de tensão em cada ramo de árvore em termos das variáveis de estado. Em um circuito simples como este, é possível fazer isso começando por qualquer resistor no qual a corrente ou a tensão seja óbvia. Os resultados estão mostrados na árvore da Figura 19.2*c*.

Podemos agora escrever as equações na forma normal aplicando a LKC no nó superior do capacitor:

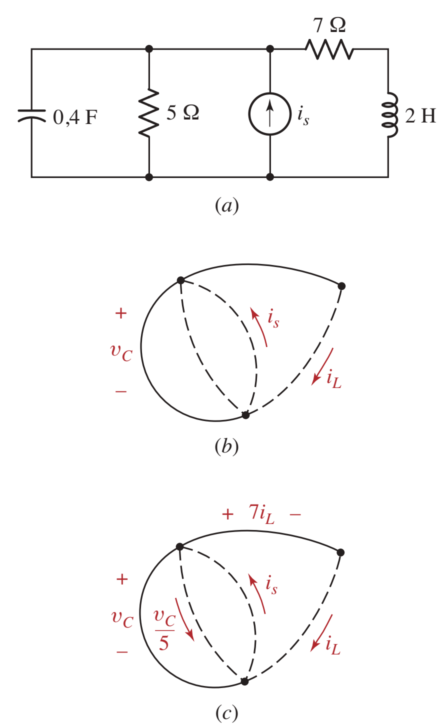
$$0{,}4v'_C + 0{,}2v_C - i_s + i_L = 0$$

ou, na forma normal,

$$v'_C = -0{,}5v_C - 2{,}5i_L + 2{,}5i_s \qquad [7]$$

Em torno do laço externo, temos

$$2i'_L - v_C + 7i_L = 0$$



▲ **FIGURA 19.2** (*a*) Circuito *RLC* requerendo duas variáveis de estado. (*b*) Uma árvore normal mostrando as variáveis de estado v_C e i_L. (*c*) A corrente em cada elo e a queda de tensão em cada ramo de árvore são expressas em termos das variáveis de estado.

ou

$$i_L' = 0{,}5v_C - 3{,}5i_L \qquad [8]$$

As Equações [7] e [8] são as equações desejadas na forma normal. A sua solução fornece todas as informações necessárias para uma análise completa do circuito dado. Naturalmente, expressões explícitas para as variáveis de estado podem ser obtidas apenas se uma função específica for atribuída a $i_s(t)$. Por exemplo, mostra-se mais adiante que se

$$i_s(t) = 12 + 3{,}2e^{-2t}u(t) \quad \text{A} \qquad [9]$$

então

$$v_C(t) = 35 + (10e^{-t} - 12e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) \quad \text{V} \qquad [10]$$

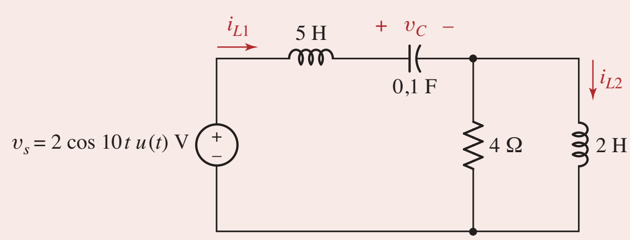
e

$$i_L(t) = 5 + (2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) \quad \text{A} \qquad [11]$$

As soluções, no entanto, não são nada óbvias, e vamos desenvolver as técnicas para obtê-las a partir das equações na forma normal na Seção 19.6.

▶ EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

19.1 Escreva um conjunto de equações na forma normal para o circuito mostrado na Figura 19.3. Ordene as variáveis de estado como i_{L1}, i_{L2} e v_C.



◀ **FIGURA 19.3**

Resposta: $i_{L1}' = -0{,}8i_{L1} + 0{,}8i_{L2} - 0{,}2v_C + 0{,}2v_s$; $i_{L2}' = 2i_{L1} - 2i_{L2}$; $v_C' = 10i_{L1}$.

19.2 ▶ ESCREVENDO UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES NA FORMA NORMAL

Nos dois exemplos considerados na seção anterior, os métodos por onde obtivemos um conjunto de equações na forma normal devem ter parecido mais arte do que ciência. Para trazer um pouco de ordem ao caos, vamos tentar seguir o procedimento usado quando estudamos a análise nodal, a análise de malha e o uso de árvores na análise nodal geral e na análise de malha geral. Procuramos um conjunto de diretrizes que possam sistematizar o procedimento. Então aplicaremos essas regras em três novos exemplos, cada um mais envolvente do que aquele que o antecede.

Aqui estão os seis passos que temos seguido:

1. *Estabeleça uma árvore normal*. Coloque capacitores e fontes de tensão na árvore, e indutores e fontes de corrente na co-árvore; coloque

tensões de controle na árvore e correntes de controle na co-árvore, se possível. É possível encontrar mais de uma árvore normal. Certos tipos de redes não permitem o desenho de nenhuma árvore normal; essas exceções são consideradas no final desta seção.

2. *Atribua variáveis de tensão e corrente*. Atribua uma tensão (com polaridade de referência) a cada capacitor e uma corrente (com a seta correspondente) a cada indutor; essas tensões e correntes são as variáveis de estado. Indique a queda de tensão em cada ramo da árvore e a corrente em cada elo em termos das fontes de tensão, das fontes de corrente e das variáveis de estado, se possível; caso contrário, atribua uma nova variável de corrente ou tensão a um ramo resistivo da árvore ou a um elo resistivo.
3. *Escreva as equações para C*. Use a LKC para escrever uma equação para cada capacitor. Iguale Cv'_C à soma das correntes de elo obtidas com a consideração do nó (ou supernó) em qualquer um dos terminais do capacitor. O supernó é identificado como o conjunto de todos os ramos da árvore conectados àquele terminal do capacitor. Não introduza quaisquer variáveis novas.
4. *Escreva as equações para L*. Use a LKT para escrever uma equação para cada indutor. Iguale Li'_L à soma das tensões de ramo de árvore obtidas com a consideração do único caminho fechado consistindo no elo em que L está localizado e num conjunto conveniente de ramos da árvore. Não introduza quaisquer variáveis novas.
5. *Escreva as equações para R (se necessário)*. Se quaisquer novas variáveis de tensão tiverem sido atribuídas a resistores no passo 2, use a LKC para igualar v_R/R à soma das correntes de elo. Se quaisquer novas variáveis de corrente tiverem sido atribuídas aos resistores no passo 2, use a LKT para igualar $i_R R$ à soma das tensões de ramo de árvore. Resolva simultaneamente essas equações envolvendo resistores para obter expressões explícitas para cada v_R e i_R em termos das variáveis de estado e das grandezas de fonte.
6. *Escreva as equações na forma normal*. Substitua as expressões para cada v_R e i_R nas equações obtidas nos passos 3 e 4, eliminado com isso todas as variáveis envolvendo resistores. Coloque as equações resultantes na forma normal.

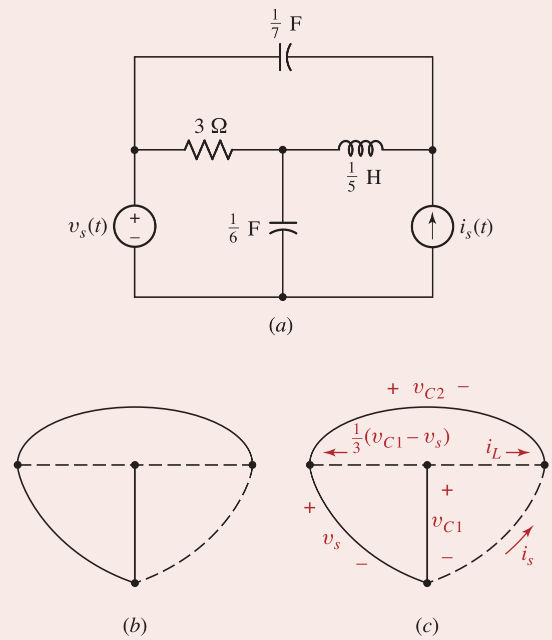
▶ EXEMPLO 19.1

Obtenha as equações na forma normal para o circuito da Figura 19.4*a*, um circuito de quatro nós que contém dois capacitores, um indutor e duas fontes independentes.

Seguindo o passo 1, desenhamos uma árvore normal. Note que apenas uma árvore como essas é possível aqui, como mostra a Figura 19.4*b*, já que os dois capacitores e a fonte de tensão devem estar localizados na árvore e o indutor e a fonte de corrente devem estar localizados na co-árvore.

Em seguida, definimos a tensão nos terminais do capacitor de $\frac{1}{6}$ F como v_{C1}, a tensão nos terminais do capacitor de $\frac{1}{7}$ F como v_{C2} e a corrente no indutor como i_L.

A tensão da fonte é indicada através de seu ramo de árvore, a corrente da fonte é marcada em seu elo, e apenas o elo do resistor permanece sem uma variável assinalada. A corrente passando por este elo da direita para a esquerda é a tensão $v_{C1} - v_s$ dividida por 3 Ω, e portanto vemos que não é necessário introduzir nenhuma nova variável. Essas tensões de ramo de árvore e correntes de elo são mostradas na Figura 19.4*c*.



▲ **FIGURA 19.4** (*a*) Um dado circuito para o qual devemos escrever equações na forma normal. (*b*) Apenas uma árvore normal é possível. (*c*) Tensões de ramo de árvore e correntes de elo são assinaladas.

Duas equações devem ser escritas para o passo 3. Para o capacitor de 1/6 F, aplicamos a LKC no nó central:

$$\frac{v'_{C1}}{6} + i_L + \frac{1}{3}(v_{C1} - v_s) = 0$$

enquanto o nó da direita é mais conveniente para o capacitor de $\frac{1}{7}$ F:

$$\frac{v'_{C2}}{7} + i_L + i_s = 0$$

Passando para o passo 4, a LKT é aplicada no elo do indutor e em toda a árvore. Neste caso:

$$\frac{i'_L}{5} - v_{C2} + v_s - v_{C1} = 0$$

Como não houve novas variáveis atribuídas ao resistor, saltamos o passo 5 e simplesmente rearranjamos as três equações precedentes para obter as equações na forma normal desejadas,

$$v'_{C1} = -\ 2v_{C1} - 6i_L + 2v_s \qquad [12]$$

$$v'_{C2} = -\ 7i_L - 7i_s \qquad [13]$$

$$i'_L = 5v_{C1} + 5v_{C2} - 5v_s \qquad [14]$$

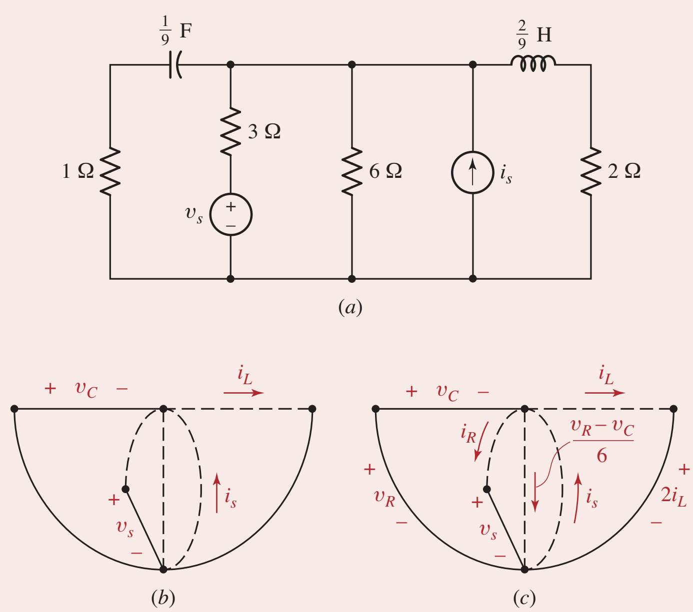
As variáveis de estado foram arbitrariamente ordenadas como v_{C1}, v_{C2} e i_L. Se ao invés disso tivéssemos selecionado ordem i_L, v_{C1} e v_{C2}, as três equações na forma normal seriam

$$\begin{aligned} i'_L &= 5v_{C1} + 5v_{C2} - 5v_s \\ v'_{C1} &= -6i_L - 2v_{C1} + 2v_s \\ v'_{C2} &= -7i_L - 7i_s \end{aligned}$$

Note que a ordem dos termos no lado direito da equação foi alterada para concordar com a ordem das equações.

▶ EXEMPLO 19.2

Escreva um conjunto de equações na forma normal para o circuito da Figura 19.5*a*.



▲ **FIGURA 19.5** (*a*) O circuito dado. (*b*) Uma das muitas árvores normais possíveis. (*c*) As tensões e correntes atribuídas.

O circuito contém vários resistores, e desta vez será necessário introduzir variáveis envolvendo resistores. Muitas árvores normais diferentes podem ser construídas para essa rede, e frequentemente vale a pena esboçar diversas árvores possíveis para ver se variáveis de tensão ou corrente em resistores podem ser evitadas a partir de uma escolha cuidadosa. A árvore que vamos usar é mostrada na Figura 19.5*b*. As variáveis de estado v_C e i_L e as funções forçantes v_s e i_s estão indicadas no grafo.

Embora pudéssemos estudar esse circuito e a árvore por alguns minutos e chegar a um método que evitasse a introdução de quaisquer variáveis novas, vamos fingir que somos estúpidos e atribuir a tensão de ramo de árvore v_R e a corrente de elo i_R aos ramos de 1 Ω e 3 Ω, respectivamente. A queda de tensão no resistor de 2 Ω é facilmente expressa como $2i_L$, enquanto a corrente passando de cima para baixo no resistor de 6 Ω se torna $(v_R - v_C)/6$. Todas as correntes de elo e tensões de ramo de árvore estão assinaladas na Fig. 19.5*c*.

A equação para o capacitor pode agora ser escrita como

$$\frac{v_C'}{9} = i_R + i_L - i_s + \frac{v_R - v_C}{6} \qquad [15]$$

e aquela para o indutor é

$$\tfrac{2}{9}i_L' = -v_C + v_R - 2i_L \qquad [16]$$

Começamos o passo 5 pelo resistor de 1 Ω. Como ele está na árvore, devemos igualar a corrente que o atravessa à soma de correntes de elo. Ambos os terminais do capacitor caem em um supernó, e temos

$$\frac{v_R}{1} = i_s - i_R - i_L - \frac{v_R - v_C}{6}$$

O resistor de 3 Ω vem em seguida, e a tensão em seus terminais pode ser escrita como

$$3i_R = -v_C + v_R - v_s$$

Essas duas últimas equações devem ser agora resolvidas simultaneamente para v_R e i_R em termos de i_L, v_C e as duas funções forçantes. Fazendo isso, vemos que

$$v_R = \frac{v_C}{3} - \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}i_s + \frac{2}{9}v_s$$

$$i_R = -\frac{2}{9}v_C - \frac{2}{9}i_L + \frac{2}{9}i_s - \frac{7}{27}v_s$$

Finalmente, esses resultados são substituídos nas Equações [16] e [17], e as equações na forma normal para a Figura 19.5 são obtidas:

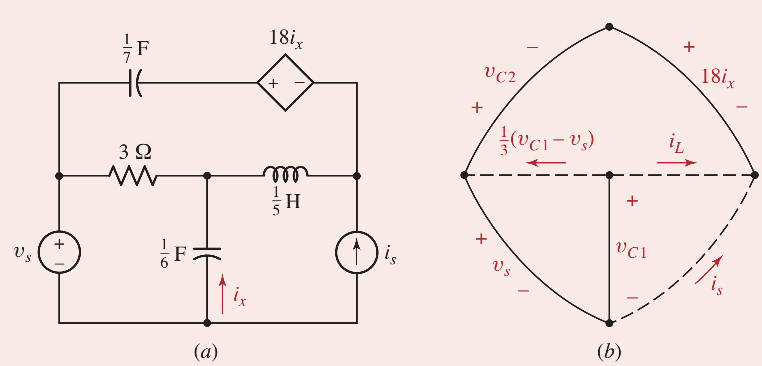
$$v_C' = -3v_C + 6i_L - 2v_s - 6i_s \qquad [17]$$

$$i_L' = -3v_C - 12i_L + v_s + 3i_s \qquad [18]$$

Até agora, discutimos apenas circuitos em que as fontes de tensão e de corrente eram fontes independentes. Vamos agora dar uma olhada em um circuito contendo uma fonte dependente.

▶ EXEMPLO 19.3

Determine o conjunto de equações na forma normal para o circuito da Figura 19.6.



▶ **FIGURA 19.6** (*a*) Circuito contendo uma fonte de tensão dependente. (*b*) A árvore normal para este circuito com as tensões de ramo de árvore e as correntes de elo atribuídas.

A única árvore normal possível é aquela mostrada na Figura 19.6*b*, e deve ser notado que não foi possível colocar a corrente de controle i_x em um elo. As tensões de ramo de árvore e as correntes de elo são mostradas no grafo linear, e elas não mudam em relação ao exemplo anterior exceto pela fonte de tensão adicional, $18i_x$.

Para o capacitor de 1/6 F, obtemos novamente

$$\frac{v'_{C1}}{6} + i_L + \frac{1}{3}(v_{C1} - v_s) = 0 \qquad [19]$$

Fazendo com que a fonte de tensão dependente se encolha em um supernó, também obtemos a relação inalterada para o capacitor de 1/7 F,

$$\frac{v'_{C2}}{7} + i_L + i_s = 0 \qquad [20]$$

Nosso resultado anterior para o indutor é alterado, no entanto, porque há um ramo a mais na árvore:

$$\frac{i'_L}{5} - 18i_x - v_{C2} + v_s - v_{C1} = 0$$

Finalmente, devemos escrever uma equação de controle que expresse i_x em termos de nossas tensões de ramo de árvore e correntes de elo. Ela é

$$i_x = i_L + \frac{v_{C1} - v_s}{3}$$

e assim a equação do indutor se torna

$$\frac{i'_L}{5} - 18i_L - 6v_{C1} + 6v_s - v_{C2} + v_s - v_{C1} = 0 \qquad [21]$$

Quando as Equações [19] a [21] são escritas na forma normal, temos

$$v'_{C1} = -2v_{C1} - 6i_L + 2v_s \qquad [22]$$

$$v'_{C2} = -7i_L - 7i_s \qquad [23]$$

$$i'_L = 35v_{C1} + 5v_{C2} + 90i_L - 35v_s \qquad [24]$$

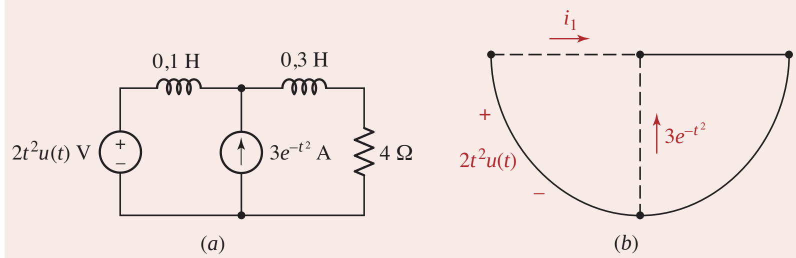
Nosso processo de escrita da equações deve ser ligeiramente modificado se não pudermos construir uma árvore normal para o circuito, e há dois tipos de rede em que isso ocorre. Uma dessas redes contém um laço em que todos os elementos são capacitores, o que torna impossível a colocação de todos eles na árvore. O outro caso ocorre se houver um nó ou um supernó conectado ao restante do circuito apenas por indutores e fontes de corrente.

Lembre-se: uma árvore, por definição, não contém caminhos fechados (laços), e cada nó deve estar conectado a pelo menos um ramo de árvore.

Quando ocorre qualquer um dos eventos acima, deparamo-nos com o desafio de deixar um capacitor fora da árvore em um caso e com a omissão de um indutor na coárvore em outro caso. Temos então um *capacitor* em um elo para o qual devemos especificar uma *corrente*, ou um *indutor* em uma árvore que requer uma *tensão*. A corrente no capacitor pode ser expressa como a capacitância vezes a derivada temporal da tensão em seus terminais, que corresponde a uma sequência de tensões de ramo de árvore; a tensão no indutor é dada pela indutância vezes a derivada da corrente entrando ou deixando o nó ou supernó em qualquer um de seus terminais.

▶ EXEMPLO 19.4

Escreva um conjunto de equações na forma normal para a rede mostrada na Figura 19.7*a*.



▲ **FIGURA 19.7** (a) Circuito para o qual uma árvore normal não pode ser desenhada. (b) Desenha-se uma árvore na qual um indutor deve ser um ramo de árvore.

Os únicos elementos conectados ao nó central são os dois indutores e a fonte de corrente, e devemos portanto colocar um indutor na árvore, como ilustrado na Figura 19.7*b*. As duas funções forçantes e a única variável de estado, a corrente i_1, estão mostradas no grafo. Note que a corrente no indutor da direita é conhecida em termos de i_1 e $3e^{-t^2}$A. Assim, não podemos especificar os estados de energia dos dois indutores de forma independente, e este sistema requer apenas a variável de estado única i_1. Naturalmente, se tivéssemos colocado o indutor de 0,1 H na árvore (ao invés do indutor de 0,3 H), a corrente no indutor da direita acabaria sendo a única variável de estado.

Ainda temos que atribuir tensões aos dois ramos de árvore remanescentes na Figura 19.7*b*. Como a corrente fluindo para a direita no indutor de 0,3 H é $i_1 + 3e^{-t^2}$, as tensões que aparecem nos terminais do indutor e do resistor de 4 Ω são $0{,}3d(i_1 + 3e^{-t^2})/dt = 0{,}3i_1' - 1{,}8te^{-t^2}$ e $4i_1 + 12e^{-t^2}$, respectivamente.

A única equação na forma normal é obtida no passo 4 de nosso procedimento:

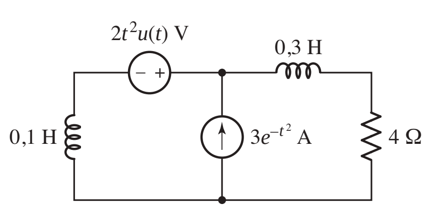
$$0{,}1i_1' + 0{,}3i_1' - 1{,}8te^{-t^2} + 4i_1 + 12e^{-t^2} - 2t^2u(t) = 0$$

ou

$$i_1' = -10i_1 + e^{-t^2}(4{,}5t - 30) + 5t^2u(t) \qquad [25]$$

Note que um dos termos no lado direito da equação é proporcional à derivada de uma das funções de fonte.

Neste exemplo, os dois indutores e a fonte de corrente estavam conectados ao mesmo nó. Em circuitos contendo mais ramos e nós, a conexão pode ser um supernó. Como uma indicação de uma rede como essa, a Figura 19.8 mostra um ligeiro rearranjo de dois elementos aparecendo na Figura 19.7*a*. Note que, novamente, os estados de energia dos dois indutores não podem ser especificados de forma independente; com a especificação de um deles, e de posse da corrente da fonte fornecida, o outro também está especificado. O método de obtenção da equação na forma normal é o mesmo.

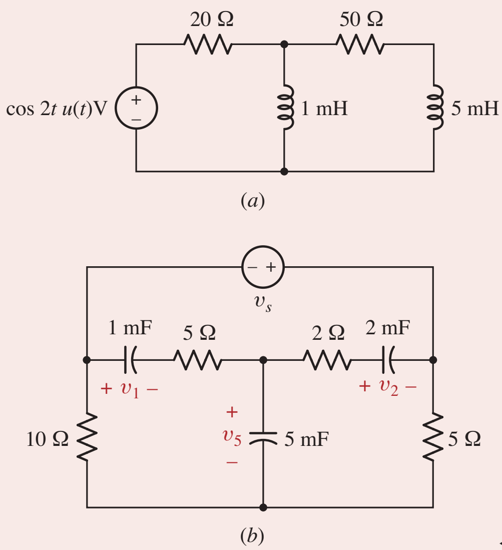


▲ **FIGURA 19.8** O circuito da Figura 19.7*a* é redesenhado de forma a fazer o supernó contendo a fonte de tensão ser conectado ao restante da rede apenas através dos dois indutores e da fonte de corrente.

A exceção criada por um laço de capacitores e fontes de tensão pode ser tratada com a aplicação de um procedimento similar (dual), e o estudante atento não deve ter muitos problemas para fazer isso.

▶ EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

19.2 Escreva equações na forma normal para o circuito da Figura 19.9*a*.

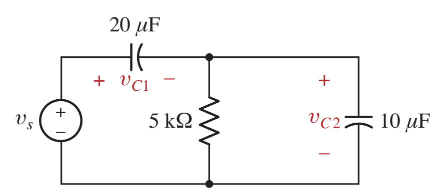


◀ **FIGURA 19.9**

19.3 Escreva as equações na forma normal para o circuito da Figura 19.9*b* usando a ordem de variáveis de estado v_1, v_2, v_5.

19.4 Determine uma equação na forma normal para o circuito mostrado na Figura 19.10 usando a variável de estado: (*a*) v_{C1}; (*b*) v_{C2}.

Resposta: 19.2: $i_1' = -20.000i_1 - 20.000i_5 + 1000 \cos 2t\, u(t)$; $i_5' = -4000i_1 - 14.000i_5 + 200\cos 2t\, u(t)$ [usando $i_1 \downarrow$ e $i_5 \downarrow$]. 19.3: $v_1' = -160v_1 - 100v_2 - 60v_5 - 140v_s$; $v_2' = -50v_1 - 125v_2 + 75v_5 - 75v_s$; $v_5' = -12v_1 + 30v_2 - 42v_5 + 2v_s$. 19.4: $v_{C1}' = -6{,}67v_{C1} + 6{,}67v_s + 0{,}333v_s'$; $v_{C2}' = -6{,}67v_{C2} + 0{,}667v_s'$.



▲ **FIGURA 19.10**

19.3 ▶ O USO DA NOTAÇÃO MATRICIAL

Nos exemplos que estudamos nas duas seções anteriores, as variáveis de estado selecionadas eram as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores, exceto no caso final, onde não foi possível desenhar uma árvore normal e apenas uma corrente de indutor pôde ser selecionada como variável de estado. À medida que o número de indutores e capacitores na rede crescer, é claro que o número de variáveis de estado crescerá. Circuitos mais complicados requerem portanto um número maior de equações de estado, cada uma delas contendo um arranjo maior de variáveis de estado em seu lado direito. Não apenas a solução de tal conjunto de equações requer o auxílio de um computador[1], como também o simples esforço de escrevê-las pode facilmente levar a câibras.

Nesta seção, vamos estabelecer uma notação simbólica útil que minimiza o esforço na escrita das equações.

Vamos apresentar esse método nos lembrando das equações na forma normal que foram obtidas para o circuito da Figura 19.6, que continham duas fontes independentes, v_s e i_s. Os resultados foram dados na forma das Equações [22] a [24] da Seção 19.2:

[1] Embora o SPICE possa ser usado na análise de quaisquer circuitos encontrados neste capítulo, outros programas computacionais são usados especificamente para resolver equações na forma normal.

$$\boxed{\begin{aligned} v'_{C1} &= -\ 2v_{C1} - 6i_L + 2v_s \\ v'_{C2} &= -\ 7i_L - 7i_s \\ i'_L &= 35v_{C1} + 5v_{C2} + 90i_L - 35v_s \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &[22] \\ &[23] \\ &[24] \end{aligned}$$

Duas de nossas variáveis de estado são tensões, uma é uma corrente, uma função forçante é uma tensão, outra é uma corrente, e as unidades associadas às constantes nos lados direitos dessas equações têm as dimensões de ohms ou siemens, ou são adimensionais.

Para evitar problemas de notação em um tratamento mais generalizado, vamos usar as letras q para denotar uma variável de estado, a para indicar uma constante multiplicando q, e f para representar todas as funções forçantes aparecendo no lado direito de uma equação. Assim, as equações [22] a [24] se tornam

$$q'_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + f_1 \qquad [26]$$

$$q'_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + f_2 \qquad [27]$$

$$q'_3 = a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + f_3 \qquad [28]$$

onde

$$\begin{array}{lllll} q_1 = v_{C1} & a_{11} = -2 & a_{12} = 0 & a_{13} = -6 & f_1 = 2v_s \\ q_2 = v_{C2} & a_{21} = 0 & a_{22} = 0 & a_{23} = -7 & f_2 = -7i_s \\ q_3 = i_L & a_{31} = 35 & a_{32} = 5 & a_{33} = 90 & f_3 = -35v_s \end{array}$$

Para uma revisão de matrizes e notação matricial, consulte o Apêndice 2.

Agora passamos a usar matrizes e álgebra linear para simplificar nossas equações e generalizar ainda mais os métodos. Primeiro definimos uma matriz **q** que chamamos de *vetor de estado*:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \qquad [29]$$

A derivada de uma matriz é obtida calculando-se a derivada de cada elemento da matriz. Assim,

$$\mathbf{q}'(t) = \begin{bmatrix} q'_1(t) \\ q'_2(t) \\ \vdots \\ q'_n(t) \end{bmatrix}$$

Vamos representar todas as matrizes e vetores neste capítulo por meio de letras minúsculas em negrito, como **q** ou $\mathbf{q}(t)$, com a única exceção da matriz identidade **I**, a ser definida na S eção 19.5. Os elementos de qualquer matriz são escalares simbolizados por letras minúsculas em itálico, como q_1 ou $q_1(t)$.

Também definimos um conjunto de funções forçantes, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ como uma matriz **f** e a chamamos de *vetor função forçante*:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \qquad [30]$$

Vamos agora voltar nossa atenção aos coeficientes a_{ij}, que representam os elementos da matriz quadrada **a** ($n \times n$),

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [31]$$

A matriz **a** é chamada de *matriz de sistema*.

Usando as matrizes que definimos nos parágrafos anteriores, podemos combinar esses resultados para obter uma representação concisa e compacta das equações de estado,

$$\mathbf{q}' = \mathbf{aq} + \mathbf{f} \qquad [32]$$

As matrizes **q′** e **f** são matrizes coluna ($n \times 1$), assim como o produto matricial **aq**.

As vantagens dessa representação são óbvias, porque um sistema de 100 equações e 100 variáveis de estado tem exatamente a mesma forma de uma equação com uma variável de estado.

Para o exemplo das Equações [22] a [24], as quatro matrizes na Equação [32] pode ser escritas explicitamente como

$$\begin{bmatrix} v'_{C1} \\ v'_{C2} \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 35 & 5 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_s \\ -7i_s \\ -35v_s \end{bmatrix} \qquad [33]$$

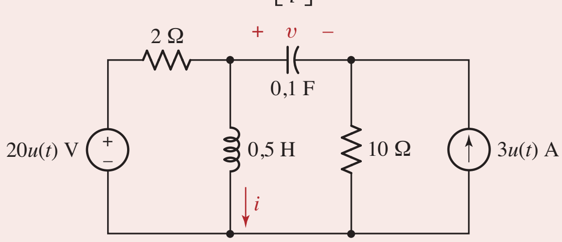
Todos, exceto especialistas em matrizes, devem separar alguns minutos para expandir a Equação [33] e então comparar os resultados com as Equações [22] a [24]; três equações idênticas a essas devem ser obtidas.

Em que ponto estamos agora com relação à análise usando variáveis de estado? Dado um circuito, sabemos construir uma árvore normal, especificar um conjunto de variáveis de estado, ordená-las na forma do vetor de estado, escrever um conjunto de equações na forma normal, e finalmente especificar a matriz de sistema e o vetor função forçante a partir das equações.

O próximo problema é a obtenção da forma explícita das funções temporais representadas palas variáveis de estado.

▶ EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

19.5 (*a*) Usando o vetor de estado $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$, determine a matriz de sistema e o vetor função forçante para o circuito da Figura 19.11. (*b*) Repita para o vetor de estado $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$.



◀ **FIGURA 19.11**

Resposta: $\begin{bmatrix} -3{,}33 & 0{,}3333 \\ -1{,}667 & -0{,}833 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 43{,}3u(t) \\ -8{,}33u(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -0{,}833 & -1{,}667 \\ 0{,}333 & -3{,}33 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8{,}33u(t) \\ 43{,}3u(t) \end{bmatrix}$

19.4 ▶ SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

A equação matricial representando o conjunto de equações na forma normal para um sistema geral de ordem n foi obtida na forma da Equação [32] na seção anterior, que é repetida aqui por conveniência como a Equação [34]:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{aq} + \mathbf{f} \tag{34}$$

Em nossos circuitos com parâmetros invariantes com o tempo, a matriz de sistema a de ordem $(n \times n)$ é composta por elementos constantes, e $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{f}$ são todas matrizes coluna $(n \times 1)$. Precisamos resolver essa equação matricial para $\mathbf{q}$, cujos elementos são $q_1, q_2, ..., q_n$. Cada um desses elementos deve ser obtido como uma função do tempo. Lembre-se de que essas são as variáveis de estado, cujo conjunto nos permite especificar cada tensão e corrente no circuito dado.

Provavelmente, a maneira mais simples de se abordar esse problema é reconstituir o método pelo qual resolvemos a equação (escalar) de primeira ordem correspondente na Seção 8.7. Vamos repetir aquele processo rapidamente, mas, ao fazer isso, devemos ter em mente o fato de que em seguida vamos estender tal procedimento a uma equação matricial.

Se cada matriz na Equação [34] tiver apenas uma linha e uma coluna, então podemos escrever a equação a equação matricial como

$$\begin{aligned}[q_1'(t)] &= [a_{11}][q_1(t)] + [f_1(t)] \\ &= [a_{11}q_1(t)] + [f_1(t)] \\ &= [a_{11}q_1(t) + f_1(t)]\end{aligned}$$

e, portanto, temos a equação de primeira ordem

$$q_1'(t) = a_{11}q_1(t) + f_1(t) \tag{35}$$

ou

$$q_1'(t) - a_{11}q_1(t) = f_1(t) \tag{36}$$

A Equação [36] tem a mesma forma da Equação [12] da Seção 8.2, e portanto procedemos usando um método similar de solução multiplicando cada lado da equação pelo fator de integração $e^{-ta_{11}}$:

$$e^{-ta_{11}}q_1'(t) - e^{-ta_{11}}q_1(t) = e^{-ta_{11}}f_1(t)$$

O lado esquerdo dessa equação é novamente uma derivada exata, e então temos

$$\frac{d}{dt}[e^{-ta_{11}}q_1(t)] = e^{-ta_{11}}f_1(t) \tag{37}$$

A ordem na qual os vários fatores da Equação [37] foi escrita pode parecer um pouco estranha, porque um termo que é o produto de uma constante e de uma função temporal é normalmente escrito com a constante aparecendo primeiro e a função temporal em seguida. Em equações escalares, a multiplicação é comutativa, e então a ordem na qual os fatores aparecem não tem qualquer consequência. Mas, nas equações matriciais que vamos considerar a seguir, os fatores correspondentes serão matrizes, e a multiplicação matricial *não* é comutativa.

Isto é, sabemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a + 4c) & (2b + 4d) \\ (6a + 8c) & (6b + 8d) \end{bmatrix}$$

enquanto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a + 6b) & (4a + 8b) \\ (2c + 6d) & (4c + 8d) \end{bmatrix}$$

Diferentes resultados são obtidos, e precisamos portanto ter cuidado mais tarde com relação à ordem na qual escrevemos os fatores matriciais.

Continuando com a Equação [37], vamos integrar cada lado em relação ao tempo, de $-\infty$ até um tempo genérico t:

$$e^{-ta_{11}} q_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-za_{11}} f_1(z)\, dz \qquad [38]$$

onde z é simplesmente uma variável muda de integração, e onde assumimos que $e^{-ta_{11}} q_1(t)$ tenda a zero à medida que t tende a $-\infty$. Agora multiplicamos (premultiplicamos, se esta fosse uma equação matricial) cada lado da Equação [38] pelo fator exponencial $e^{-ta_{11}}$, obtendo

$$q_1(t) = e^{ta_{11}} \int_{-\infty}^{t} e^{-za_{11}} f_1(z)\, dz \qquad [39]$$

que é a expressão desejada para a única variável de estado desconhecida.

Em muitos circuitos, particularmente aqueles em que chaves estão presentes e o circuito é reconfigurado em algum instante de tempo (frequentemente em $t = 0$), não conhecemos a função forçante ou a equação na forma normal antes daquele instante. Portanto, incorporamos toda a história passada em uma integral de $-\infty$ até aquele instante, aqui assumido como $t = 0$, fazendo $t = 0$ na Equação [39]:

$$q_1(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-za_{11}} f_1(z)\, dz$$

Quando usamos o valor inicial na solução geral para $q_1(t)$:

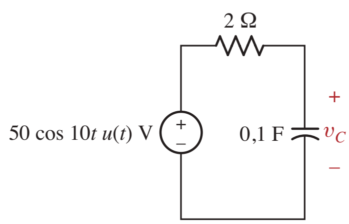
$$q_1(t) = e^{ta_{11}} q_1(0) + e^{ta_{11}} \int_{0}^{t} e^{-za_{11}} f_1(z)\, dz \qquad [40]$$

A última expressão mostra que a função temporal da variável de estado pode ser interpretada como a soma de dois termos. O primeiro é a resposta que apareceria se a função forçante fosse nula [$f_1(t) = 0$], que na linguagem da análise por variáveis de estado é chamada de *resposta à entrada zero*. Ela tem a forma da resposta natural, embora possa não ter a mesma amplitude do termo que temos chamado de resposta natural. A resposta à entrada zero também é a solução da equação na forma normal homogênea, que é obtida fazendo $f_1(t) = 0$ na Equação [36].

A segunda parte da solução representaria a resposta completa se $q_1(0)$ fosse nula e é chamada de *resposta ao estado zero*. Veremos em um exemplo seguinte que o que chamamos de resposta forçada aparece como parte da resposta ao estado zero.

▶ EXEMPLO 19.5

Determine $v_C(t)$ para o circuito da Figura 19.12.



▲ **FIGURA 19.12** Circuito de primeira ordem para o qual a tensão $v_C(t)$ deve ser determinada usando-se os métodos da análise por variáveis de estado.

A equação na forma normal é facilmente determinada como

$$v_C' = -5v_C + 250\cos 10t\, u(t)$$

Logo, $a_{11} = -5$, $f_1(t) = 250 \cos 10t\, u(t)$, e podemos substituir diretamente na Equação [39] para obter a solução:

$$v_C(t) = e^{-5t}\int_{-\infty}^{t} e^{5z}250\cos 10z\, u(z)\, dz$$

A função degrau unitário dentro da integral pode ser trocada por $u(t)$ fora da integral se o limite inferior for alterado para zero:

$$v_C(t) = e^{-5t}u(t)\int_{0}^{t} e^{5z}250\cos 10z\, dz$$

Integrando, temos

$$v_C(t) = e^{-5t}u(t)\left[\frac{250e^{5z}}{5^2+10^2}(5\cos 10z + 10\,\mathrm{sen}\,10z)\right]_0^t$$

ou

$$v_C(t) = [-10e^{-5t} + 10(\cos 10t + 2\,\mathrm{sen}\,10t)]u(t) \qquad [41]$$

O mesmo resultado pode ser obtido com o uso da Equação [40]. Como $v_C(0) = 0$, temos

$$v_C(t) = e^{-5t}(0) + e^{-5t}\int_0^t e^{5z}250\cos 10z\, u(z)\, dz$$

$$= e^{-5t}u(t)\int_0^t e^{5z}250\cos 10z\, dz$$

e essa integral leva à mesma solução obtida anteriormente, é claro. Entretanto, também vemos que a solução total para $v_C(t)$ é a resposta ao estado zero, e não há resposta à entrada zero. É interessante notar que, se tivéssemos resolvido este problema aplicando os métodos do Capítulo 8, teríamos obtido uma resposta natural

$$v_{C,n}(t) = Ae^{-5t}$$

e computado a resposta forçada por meio de métodos no domínio da frequência,

$$\mathbf{V}_{C,f} = \frac{50}{2-j1}(-j1) = 10 - j20$$

de forma que

$$v_{C,f}(t) = 10\cos 10t + 20\,\mathrm{sen}\,10t$$

Logo,

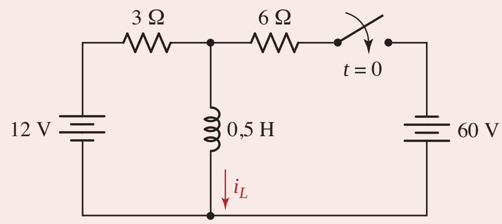
$$v_C(t) = Ae^{-5t} + 10(\cos 10t + 2\,\mathrm{sen}\,10t) \qquad (t > 0)$$

e a aplicação da condição inicial, $v_C(0) = 0$, leva a $A = -10$ e a uma expressão idêntica à Equação [41], novamente. Olhando para as respostas parciais obtidas nos dois métodos, vemos portanto que

$$
\begin{aligned}
v_{C,\text{entrada zero}} &= 0 \\
v_{C,\text{estado zero}} &= [-10e^{-5t} + 10(\cos 10t + 2\,\text{sen}\,10t)]u(t) \\
v_{C,n} &= -10e^{-5t}u(t) \\
v_{C,f} &= 10(\cos 10t + 2\,\text{sen}\,10t)u(t)
\end{aligned}
$$

▶ EXEMPLO 19.6

A chave no circuito da Figura 19.13 é acionada em $t = 0$, e a forma do circuito muda nesse instante. Determine $i_L(t)$ em $t > 0$.



▲ **FIGURA 19.13** Exemplo de primeira ordem no qual a forma do circuito muda em $t = 0$.

Representamos tudo antes de $t = 0$ dizendo que $i_L(0) = 4$ A, e obtemos a equação na forma normal para o circuito na configuração que ele apresenta *após* t = 0. Ela é

$$i'_L(t) = -4i_L(t) - 24$$

Dessa vez, devemos usar a Equação [40], já que não temos uma equação na forma normal que seja válida em todo o tempo. O resultado é

$$i_L(t) = e^{-4t}(4) + e^{-4t}\int_0^t e^{+4z}(-24)\,dz$$

ou

$$i_L(t) = 4e^{-4t} - 6(1 - e^{-4t}) \qquad (t > 0)$$

Os vários componentes da resposta são agora identificados

$$
\begin{aligned}
i_{L,\text{ entrada zero}} &= 4e^{-4t} && (t > 0) \\
i_{L,\text{ estado zero}} &= -6(1 - e^{-4t}) && (t > 0)
\end{aligned}
$$

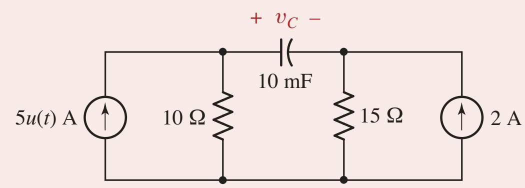
enquanto os métodos analíticos que usamos anteriormente teriam levado a

$$
\begin{aligned}
i_{L,n} &= 10e^{-4t} && (t > 0) \\
i_{L,f} &= -6 && (t > 0)
\end{aligned}
$$

Essas redes de primeira ordem certamente não requerem o uso de variáveis de estado para a sua análise. Entretanto, o método pelo qual resolvemos uma única equação na forma normal oferece algumas pistas a respeito de como a solução de ordem n poderia ser obtida. Seguimos essa trilha excitante na próxima seção.

▶ EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

19.6 (*a*) Escreva a equação na forma normal para o circuito da Figura 19.14. Determine $v_C(t)$ para $t > 0$ pela (*b*) Equação [39]; (*c*) Equação [40].



◀ **FIGURA 19.14**

Resposta: $v_C' = -4v_C - 120 + 200u(t)$; $20 - 50e^{-4t}$ V; $20 - 50e^{-4t}$ V.

19.5 ▶ A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL

A equação matricial genérica do sistema de ordem *n* que agora desejamos resolver é a Equação [34] da Seção 19.4,

$$\boxed{\mathbf{q}' = \mathbf{aq} + \mathbf{f}} \qquad [34]$$

onde **a** é uma matriz quadrada ($n \times n$) de constantes e as outras três matrizes são matrizes coluna ($n \times 1$) cujos elementos são, em geral, funções do tempo. No caso mais geral, todas as matrizes seriam compostas por funções temporais.

Nesta seção, obtemos a solução matricial dessa equação. Na Seção 19.6, interpretamos nossos resultados e indicamos como poderíamos obter uma solução útil para **q**.

Começamos subtraindo o produto matricial **aq** de cada lado da Equação [34]:

$$\mathbf{q}' - \mathbf{aq} = \mathbf{f} \qquad [42]$$

Relembrando do fator de integração $e^{-ta_{11}}$ que usamos no caso de primeira ordem, vamos pré-multiplicar cada lado da Equação [42] por $e^{-t\mathbf{a}}$:

$$e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}' - e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{aq} = e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{f} \qquad [43]$$

Embora a presença de uma matriz no expoente possa parecer um pouco estranha, a função $e^{-t\mathbf{a}}$ pode ser definida em termos de sua expansão em séries de potências infinitas em *t*,

$$e^{-t\mathbf{a}} = \mathbf{I} - t\mathbf{a} + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{a})^2 - \frac{t^3}{3!}(\mathbf{a})^3 + \cdots \qquad [44]$$

Identificamos **I** como a matriz identidade ($n \times n$),

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\mathbf{Ia} = \mathbf{aI} = \mathbf{a}$$

Os produtos $(\mathbf{a})^2$, $(\mathbf{a})^3$ e assim por diante na Equação [44] podem ser obtidos com repetidas multiplicações da matriz **a** por si mesma, e portanto cada termo na expansão é novamente uma matriz $(n \times n)$. Assim, é claro que e^{-ta} também é uma matriz quadrada $(n \times n)$, mas seus elementos são, em geral, funções do tempo.

Seguindo novamente o procedimento de primeira ordem, vamos agora mostrar que o lado esquerdo da Equação [43] é igual à derivada temporal de $e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}$. Como este é um produto de duas funções temporais, temos

$$\frac{d}{dt}(e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}) = e^{-t\mathbf{a}}\frac{d}{dt}(\mathbf{q}) + \left[\frac{d}{dt}(e^{-t\mathbf{a}})\right]\mathbf{q}$$

A derivada de $e^{-t\mathbf{a}}$ é obtida novamente com a consideração da série infinita da Equação [44], e vemos que o resultado é dado como $-\mathbf{a}e^{-t\mathbf{a}}$. A expansão em séries também pode ser usada para mostrar que $-\mathbf{a}e^{-t\mathbf{a}} = -e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{a}$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}) = e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}' - e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{q}$$

e a Equação [43] ajuda a simplificar essa expressão, colocando-a na forma

$$\frac{d}{dt}(e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q}) = e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{f}$$

Multiplicando por dt e integrando de $-\infty$ a t, temos

$$e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q} = \int_{-\infty}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)\,dz \qquad [45]$$

Para resolver para **q**, devemos pré-multiplicar o lado esquerdo da Equação [45] pela matriz inversa de $e^{-t\mathbf{a}}$. Isto é, qualquer matriz quadrada **b** tem uma inversa $\mathbf{b}^{-1}$ tal que $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{I}$. Neste caso, uma outra expansão em séries de potências mostra que a inversa de $e^{-t\mathbf{a}}$ é $e^{t\mathbf{a}}$, ou

$$e^{t\mathbf{a}}e^{-t\mathbf{a}}\mathbf{q} = \mathbf{I}\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

e podemos portanto escrever a nossa solução como

$$\mathbf{q} = e^{t\mathbf{a}}\int_{-\infty}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)\,dz \qquad [46]$$

Em termos do valor inicial do vetor de estados,

$$\mathbf{q} = e^{t\mathbf{a}}\mathbf{q}(0) + e^{t\mathbf{a}}\int_{0}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)\,dz \qquad [47]$$

A função $e^{t\mathbf{a}}$ é uma grandeza muito importante na análise por espaços de estado. Ela é chamada de *matriz de transição de estados*, por descrever como o estado do sistema muda de seu estado zero para seu estado no tempo t. As Equações [46] e [47] são as equações matriciais de ordem n que correspondem aos resultados de primeira ordem que numeramos como [39] e [40]. Embora essas expressões representem “soluções” para **q**, o fato de expressarmos $e^{t\mathbf{a}}$ e $e^{-t\mathbf{a}}$ apenas como séries infinitas é um sério empecilho para que façamos qualquer uso efetivo desses resultados. Teríamos séries de potências infinitas em t para cada $q_i(t)$, e, enquanto um computador poderia achar esse procedimento compatível com sua memória e velocidade de processamento, provavelmente teríamos outras tarefas mais urgentes do que realizar essa soma com as nossas próprias mãos.

▶ EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

19.7 Sejam $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $t = 0{,}1$ s. Use a expansão em séries de potência para determinar (*a*) a matriz $e^{-t\mathbf{a}}$; (*b*) a matriz $e^{t\mathbf{a}}$; (*c*) o valor do determinante de $e^{-t\mathbf{a}}$; (*d*) o valor do determinante de $e^{-t\mathbf{a}}$; (*e*) o produto dos dois últimos resultados.

Resposta: $\begin{bmatrix} 0{,}9903 & -0{,}1897 \\ 0{,}0948 & 0{,}8955 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0{,}9897 & 0{,}2097 \\ -0{,}1048 & 1{,}0945 \end{bmatrix}$; 0,9048; 1,1052; 1,0000.

19.6 ▶ UM OLHAR MAIS DETALHADO NA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS

Nesta seção, procuramos uma representação mais satisfatória para $e^{t\mathbf{a}}$ e $e^{-t\mathbf{a}}$. Se a matriz de sistema $\mathbf{a}$ é uma matriz quadrada $(n \times n)$, então cada uma dessas exponenciais é uma matriz $(n \times n)$ de funções temporais, e uma das consequências de um teorema desenvolvido na álgebra linear, conhecido como o teorema de Cayley-Hamilton, mostra que tal matriz pode ser expressa como um polinômio de grau $(n - 1)$ na matriz $\mathbf{a}$. Isto é,

$$e^{t\mathbf{a}} = u_0\mathbf{I} + u_1\mathbf{a} + u_2(\mathbf{a})^2 + \cdots + u_{n-1}(\mathbf{a})^{n-1} \qquad [48]$$

onde cada u_i é uma função temporal escalar ainda a ser determinada; os termos $\mathbf{a}^i$ são matrizes $(n \times n)$ constantes. O teorema também diz que a Equação [48] permanece uma igualdade se a matriz $\mathbf{I}$ for substituída pela unidade e se $\mathbf{a}$ for trocada por qualquer uma das raízes escalares s_i da n-ésima equação escalar,

$$\det(\mathbf{a} - s\mathbf{I}) = 0 \qquad [49]$$

A expressão $\det(\mathbf{a} - s\mathbf{I})$ indica o determinante da matriz $(\mathbf{a} - s\mathbf{I})$. Esse determinante é um polinômio em s de grau n. Assumimos que as n raízes sejam diferentes. A Equação [49] é chamada de *equação característica* da matriz $\mathbf{a}$, e os valores de s que são raízes da equação são conhecidos como os *autovalores* de $\mathbf{a}$.

Esses valores de s são idênticos às frequências naturais às quais nos referimos no Capítulo 15 como sendo os polos de uma função de transferência apropriada. Isto é, se nossa variável de estado é $v_{C1}(t)$, então os polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{C1}(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ ou de $\mathbf{V}_{C1}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$ também são os autovalores da equação característica.

Assim, este é o procedimento que vamos seguir para obter uma forma mais simples para $e^{-t\mathbf{a}}$:

1. A partir de **a**, forme a matriz ($\mathbf{a} - s\mathbf{I}$).
2. Iguale a zero o determinante dessa matriz quadrada.
3. Resolva o polinômio resultante de ordem n para as suas n raízes, $s_1, s_2, \ldots, s_n$.
4. Escreva as n equações escalares na forma

$$e^{ts_i} = u_0 + u_1 s_i + \cdots + u_{n-1} s_i^{n-1} \qquad [50]$$

5. Resolva para as n funções temporais $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.
6. Substitua essas funções temporais na Equação [48] para obter a matriz ($n \times n$) $e^{t\mathbf{a}}$.

Para ilustrar esse procedimento, vamos usar a matriz de sistema que corresponde às Equações [7] e [8] da Seção 19.1 e ao circuito mostrado na Figura 19.2*a*.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -2{,}5 \\ 0{,}5 & -3{,}5 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(\mathbf{a} - s\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -2{,}5 \\ 0{,}5 & -3{,}5 \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-0{,}5 - s) & -2{,}5 \\ 0{,}5 & (-3{,}5 - s) \end{bmatrix}$$

e a expansão do determinante (2 × 2) correspondente fornece

$$\det\begin{bmatrix} (-0{,}5 - s) & -2{,}5 \\ 0{,}5 & (-3{,}5 - s) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (-0{,}5 - s) & -2{,}5 \\ 0{,}5 & (-3{,}5 - s) \end{vmatrix}$$
$$= (-0{,}5 - s)(-3{,}5 - s) + 1{,}25$$

de forma que

$$\det(\mathbf{a} - s\mathbf{I}) = s^2 + 4s + 3$$

As raízes desse polinômio são $s_1 = -1$ e $s_2 = -3$, e substituímos cada um desses valores na Equação [50], obtendo as duas equações

$$e^{-t} = u_0 - u_1 \qquad \text{e} \qquad e^{-3t} = u_0 - 3u_1$$

Subtraindo, vemos que

$$u_1 = 0{,}5e^{-t} - 0{,}5e^{-3t}$$

e, portanto,

$$u_0 = 1{,}5e^{-t} - 0{,}5e^{-3t}$$

Note que cada u_i tem a forma geral da resposta natural.
Quando essas duas funções são substituídas na Equação [48], de forma que

$$e^{t\mathbf{a}} = (1{,}5e^{-t} - 0{,}5e^{-3t})\mathbf{I} + (0{,}5e^{-t} - 0{,}5e^{-3t})\begin{bmatrix} -0{,}5 & -2{,}5 \\ 0{,}5 & -3{,}5 \end{bmatrix}$$

podemos realizar as operações indicadas para obter

$$e^{t\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} (1{,}25e^{-t} - 0{,}25e^{-3t}) & (-1{,}25e^{-t} + 1{,}25e^{-3t}) \\ (0{,}25e^{-t} - 0{,}25e^{-3t}) & (-0{,}25e^{-t} + 1{,}25e^{-3t}) \end{bmatrix} \qquad [51]$$

De posse de $e^{t\mathbf{a}}$, formamos $e^{-t\mathbf{a}}$ trocando cada t na Equação [51] por $-t$. Para completar este exemplo, podemos identificar **q** e **f** a partir das Equações [7], [8] e [9]:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 30 + 8e^{-2t}u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [52]$$

Como parte do vetor função forçante está presente em $t < 0$, também podemos usar a Equação [46] para resolver para o vetor de estados:

$$\boxed{\mathbf{q} = e^{t\mathbf{a}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)\,dz} \qquad [46]$$

O produto matricial $e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)$ é em seguida formado trocando-se t por $-z$ na Equação [51] e então realizando-se a sua pré-multiplicação pela Equação [52] com z no lugar de t. Com apenas um pouco de trabalho, obtemos

$$e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 37{,}5e^{z} - 7{,}5e^{3z} + (10e^{-z} - 2e^{z})u(z) \\ 7{,}5e^{z} - 7{,}5e^{3z} + (2e^{-z} - 2e^{z})u(z) \end{bmatrix}$$

Integrando os dois primeiros termos de cada elemento de $-\infty$ a t, e os dois últimos termos de 0 a t, temos

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}\,dz = \begin{bmatrix} 35{,}5e^{t} - 2{,}5e^{3t} - 10e^{-t} + 12 \\ 5{,}5e^{t} - 2{,}5e^{3t} - 2e^{-t} + 4 \end{bmatrix} \qquad (t > 0)$$

Finalmente, devemos pré-multiplicar essa matriz pela Equação [51], e essa multiplicação matricial envolve um grande número de multiplicações escalares e adições algébricas de funções temporais parecidas. O resultado é o vetor de estados desejado

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 35 + 10e^{-t} - 12e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ 5 + 2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad (t > 0)$$

Essas são as expressões dadas informalmente nas Equações [10] e [11] no final da Seção 19.1.

Possuímos agora uma técnica geral que poderíamos aplicar em problemas de ordem mais elevada. Tal procedimento é teoricamente possível, mas o trabalho envolvido logo se torna monumental. Ao invés disso, utilizamos programas computacionais que trabalham diretamente a partir das equações na forma normal e dos valores iniciais das variáveis de estado. Conhecendo $\mathbf{q}(0)$, computamos $\mathbf{f}(0)$ e resolvemos as equações para $\mathbf{q}'(0)$. Então, o vetor $\mathbf{q}(\Delta t)$ pode ser aproximado a partir de seu valor inicial e de sua derivada: $\mathbf{q}(\Delta t) = \mathbf{q}(0) + \mathbf{q}'(0)\Delta t$. Com este valor para $\mathbf{q}(\Delta t)$, as equações na forma normal são usadas para determinar-se um valor para $\mathbf{q}'(\Delta t)$, e o processo continua em incrementos de tempo de Δt. Menores valores de Δt levam a um $\mathbf{q}(t)$ mais exato em qualquer tempo $t > 0$, mas com esperadas penalizações em termos do tempo de processamento computacional e da demanda de espaço de armazenamento no computador.

Realizamos várias coisas neste capítulo. Primeiro, e talvez o que seja mais importante, aprendemos alguns dos termos e ideias deste ramo da análise de sistemas, e isso deve dar mais significado e prazer aos nossos estudos futuros nesta área.

Outra realização é a solução geral para o caso de primeira ordem na forma matricial.

Também obtivemos a solução matricial para o caso geral. Essa introdução ao uso de matrizes na análise de circuitos e sistemas é uma ferramenta que se torna cada vez mais necessária em trabalhos mais avançados nessas áreas.

Finalmente, indicamos como uma solução numérica poderia ser obtida com o uso de métodos numéricos, de preferência usando um computador digital.

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

19.8 Dados $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -27 \\ \frac{1}{3} & -10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 243u(t) \\ 40u(t) \end{bmatrix}$, e $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 5 \end{bmatrix}$, use um Δt de 0,001 e calcule: (*a*) $v_C(0{,}001)$; (*b*) $i_L(0{,}001)$; (*c*) $v'_C(0{,}001)$; (*d*) $i'_L(0{,}001)$; (*e*) $v_C(0{,}002)$; (*f*) $i_L(0{,}002)$.

Resposta: 150,108 V; 5,04 A; 106,92 V/s; 39,636 A/s; 150,2149 V; 5,0796 A.

RESUMO E REVISÃO

- O termo *variável de estado* na análise de circuitos se refere a uma corrente de indutor ou a uma tensão de capacitor, já que ambas podem descrever o estado de energia de um sistema (isto é, de um circuito).
- Os seis passos usados na construção de um conjunto de equações para a análise por variáveis de estado são:
  1. Estabeleça uma árvore normal.
  2. Atribua variáveis de tensão e corrente.
  3. Escreva as equações *C*.
  4. Escreva as equações *L*.
  5. Escreva as equações *R* (se necessário).
  6. Escreva as equações na forma normal.
- O *vetor de estados* é uma matriz que contém as variáveis de estado q_i.
- A *matriz função forçante* é uma matriz que contém o conjunto de funções forçantes f_i.
- A *matriz de sistema* **a** contém os coeficientes a_{ij} das equações de estado.
- Se escrevermos a representação da equação matricial de primeira ordem do conjunto de equações de estado na forma normal como $\mathbf{q}' = \mathbf{aq} + \mathbf{f}$, a única variável de estado desconhecida $q_1(t)$ é dada como a soma da resposta à entrada zero $e^{ta_{11}}q_1(0)$ e da resposta ao estado zero $e^{ta_{11}} \int_0^t e^{-za_{11}} f_1(z)dz$.
- A solução geral para a equação matricial, expressa em termos da matriz de transição de estados $e^{t\mathbf{a}}$, é $\mathbf{q} = e^{t\mathbf{a}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z\mathbf{a}}\mathbf{f}(z)dz$.

EXERCÍCIOS

19.1 Variáveis de Estado e Equações na Forma Normal

1. Usando a ordem i_1, i_2, i_3, escreva as seguintes equações como um conjunto de equações na forma normal: $-2i_1' - 6i_3' = 5 + 2\cos 10t - 3i_1 + 2i_2$, $4i_2 = 0{,}05i_1' - 0{,}15i_2' + 0{,}25i_3'$, $i_2 = 2i_1 - 5i_3 + 0{,}4\int_0^t (i_1 - i_3)dt + 8$.

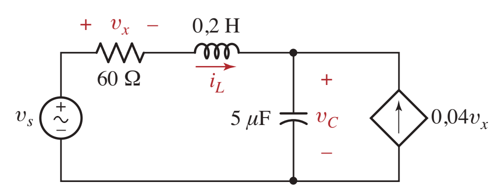
2. Dadas as duas equações diferenciais lineares $x' + y' = x + y + 1$ e $x' - 2y' = 2x - y - 1$: (*a*) escreva as duas equações na forma normal, usando a ordem x, y; (*b*) obtenha uma única equação diferencial envolvendo apenas $x(t)$ e suas derivadas. (*c*) Se $x(0) = 2$ e $y(0) = -5$, obtenha $x'(0)$, $x''(0)$ e $x'''(0)$.

3. Escreva as equações seguintes na forma normal, usando a ordem x, y, z: $x' - 2y - 3z' = f_1(t)$, $2x' + 5z = 3$, $z' - 2y' - x = 0$.

4. Se $x' = -2x - 3y + 4$ e $y' = 5x - 6y + 7$, assuma $x(0) = 2$ e $y(0) = 1/3$ e obtenha: (*a*) $x''(0)$; (*b*) y''; (*c*) $y'''(0)$.

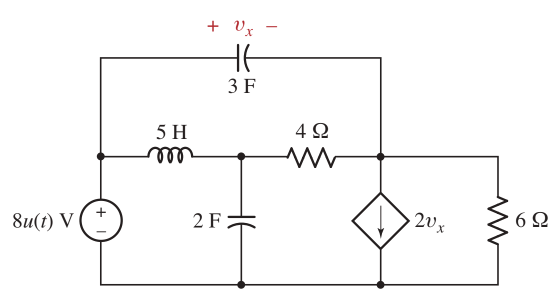
19.2 Escrevendo um Conjunto de Equações na Forma Normal

5. Se $v_s = 100 \cos 120\pi t$ V, escreva um conjunto de equações na forma normal para o circuito mostrado na Figura 19.15. Use i_L e v_C como as variáveis de estado.



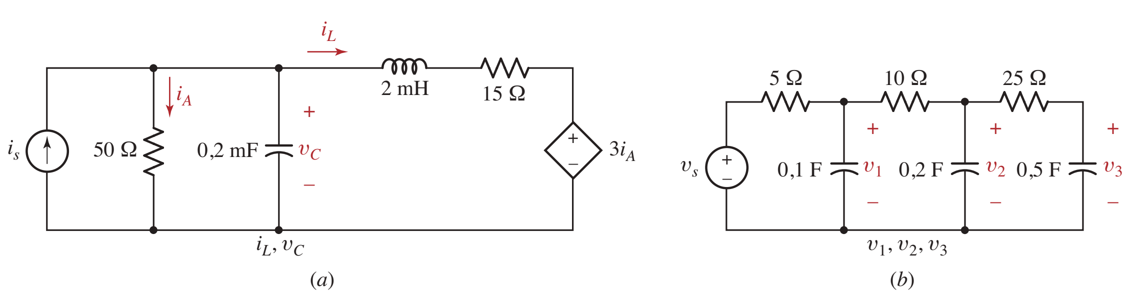
◀ **FIGURA 19.15**

6. (*a*) Desenhe uma árvore normal para o circuito da Figura 19.16 e atribua as variáveis de estado necessárias (por uniformidade, coloque as referências + no topo ou no lado esquerdo de um elemento, e setas diretas apontando para baixo ou para a direita). (*b*) Especifique cada corrente de elo e tensão de ramo de árvore em termos das fontes, dos valores dos elementos e das variáveis de estado. (*c*) Escreva as equações na forma normal usando a ordem i_L, v_x, v_{2F}.



◀ **FIGURA 19.16**

7. Escreva um conjunto de equações na forma normal para cada circuito mostrado na Figura 19.17. Use a ordem de variáveis de estado fornecida abaixo do circuito.



▲ **FIGURA 19.17**

8. Um resistor de 12,5 Ω é colocado em série com o capacitor de 0,2 mF no circuito da Figura 19.17*a*. Usando uma corrente e uma tensão, nesta ordem, escreva um conjunto de equações na forma normal para esse circuito.

9. (*a*) Escreva equações na forma normal em função das variáveis de estado v_1, v_2, i_1 e i_2 para a Figura 19.18. (*b*) Repita se a fonte de corrente for trocada por um resistor de 3 Ω.

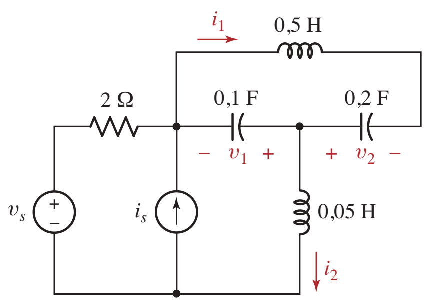


FIGURA 19.18

10. Escreva um conjunto de equações na forma normal na ordem i_L, v_C para cada circuito mostrado na Figura 19.19.

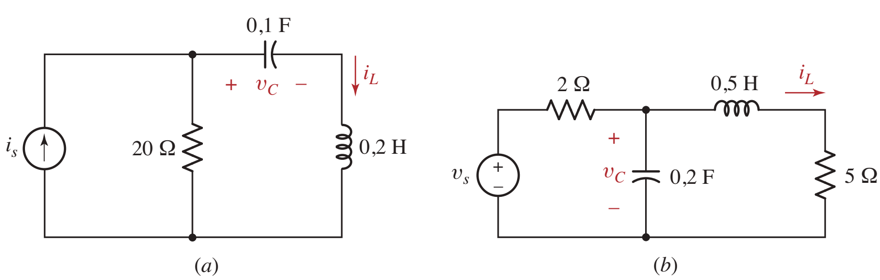


FIGURA 19.19

11. Escreva um conjunto de equações na forma normal para o circuito mostrado na Figura 19.20. Use a ordem de variáveis *v*, *i*.

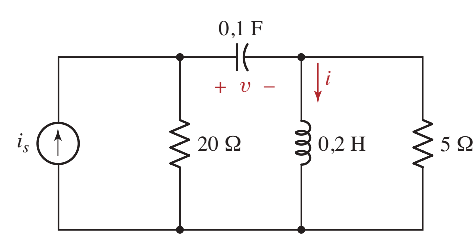


FIGURA 19.20

12. Se $v_s = 5$ sen $2t\,u(t)$ V, escreva um conjunto de equações na forma normal para o circuito da Figura 19.21.

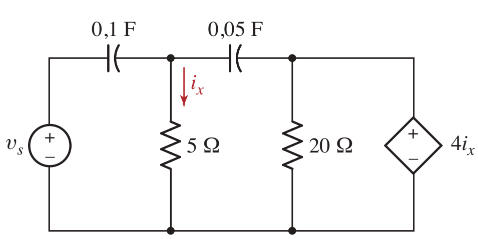


FIGURA 19.21

19.3 O Uso da Notação Matricial

13. (*a*) Dados $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 1+t \end{bmatrix}$, escreva três equações na forma normal. (*b*) Se $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, mostre as variáveis de estado e os elementos (com seus valores) no esqueleto de diagrama de circuito da Figura 19.22.

14. Substitua os capacitores no circuito da Figura 19.17*b* por indutores de 0,1 H, 0,2 H e 0,5 H e obtenha *a* e *f* se i_{L1}, i_{L2} e i_{L3} são as variáveis de estado.

▲ **FIGURA 19.22**

15. Dado o vetor de estados $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}$, assuma a matriz de sistema $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e o vetor função forçante $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Outras tensões e correntes no circuito aparecem no vetor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_{o1} \\ v_{o2} \\ i_{R1} \\ i_{R2} \end{bmatrix}$, e elas estão relacionadas ao vetor de estados por $\mathbf{w} = \mathbf{bq} + \mathbf{d}$, onde $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

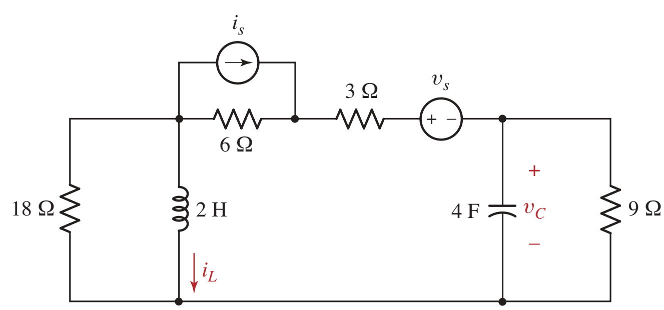
   Escreva um conjunto de equações tendo v'_{o1}, v'_{o2}, i'_{R1} e i'_{R2} como funções das variáveis de estado.

16. Sejam $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t \\ \operatorname{sen} 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   Então se $\mathbf{q}' = \mathbf{aq} + \mathbf{f}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{by} + \mathbf{d}$, determine $\mathbf{q}(0)$ e $\mathbf{q}'(0)$ se $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

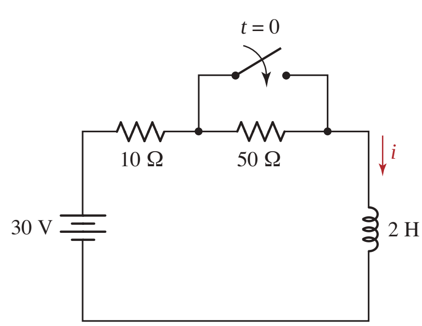
19.4 Solução da Equação de Primeira Ordem

17. Obtenha **a** e **f** para o circuito mostrado na Figura 19.23 se $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$.



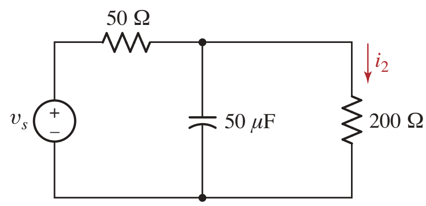
◀ **FIGURA 19.23**

18. Para o circuito mostrado na Figura 19.24: (*a*) escreva a equação na forma normal para i, $t > 0$; (*b*) resolva essa equação para i; (*c*) identifique as respostas ao estado zero e à entrada zero; (*d*) determine i pelos métodos do Cap. 8 e especifique as respostas natural e forçada.



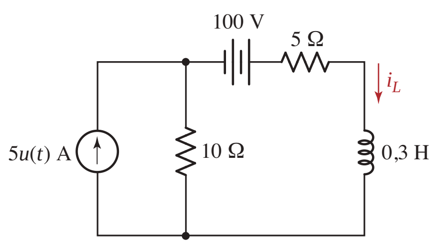
◀ **FIGURA 19.24**

19. Seja $v_s = 2tu(t)$ V no circuito mostrado na Figura 19.25. Determine $i_2(t)$.



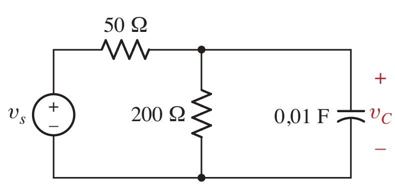
◀ **FIGURA 19.25**

20. (*a*) Use o método de variáveis de estado para obter $i_L(t)$ em todo t no circuito mostrado na Figura 19.26. (*b*) Identifique as respostas à entrada zero, ao estado zero, natural e forçada.



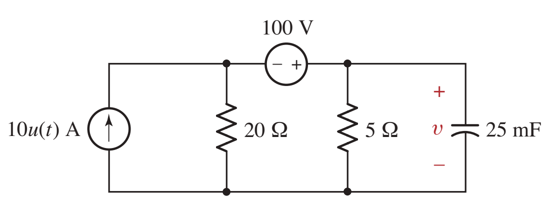
◀ **FIGURA 19.26**

21. Seja $v_s = 100[u(t) - u(t - 0{,}5)] \cos \pi t$ V na Figura 19.27. Obtenha v_C para $t > 0$.



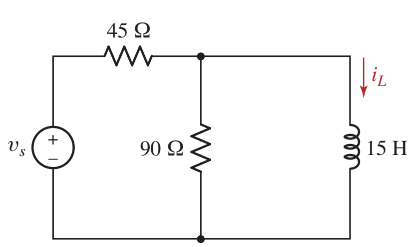
◀ **FIGURA 19.27**

22. (*a*) Escreva a equação na forma normal para o circuito mostrado na Figura 19.28. (*b*) Determine $v(t)$ para $t < 0$ e $t > 0$. (*c*) Identifique a resposta forçada, a resposta natural, a resposta ao estado zero e a resposta à entrada zero.



◀ **FIGURA 19.28**

23. Seja $v_s = 90e^{-t}[u(t) - u(t - 0{,}5)]$ V no circuito da Figura 19.29. Determine $i_L(t)$.



◀ **FIGURA 19.29**

19.5 A Solução da Equação Matricial

24. Dada a matriz de sistema $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$, faça t = 10 ms e use a série de potências infinita da função exponencial para obter (*a*) $e^{-t\mathbf{a}}$; (*b*) $e^{t\mathbf{a}}$; (*c*) $e^{-t\mathbf{a}}e^{t\mathbf{a}}$.

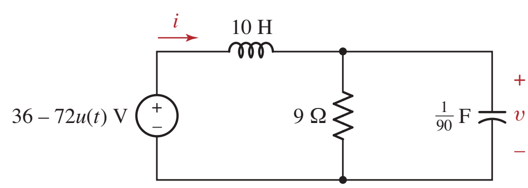
19.6 Um Olhar Mais Detalhado na Matriz de Transição de Estados

25. (*a*) Se $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \cos t \\ -u(t) \end{bmatrix}$, e $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, escreva o conjunto de equações na forma normal. (*b*) Se $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, estime $\mathbf{q}(0{,}1)$ usando $\Delta t = 0{,}1$. (*c*) repita para $\Delta t = 0{,}05$.

26. Determine os autovalores da matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Como ajuda, uma raiz está próxima de $s = -3{,}5$.

27. Usando o método descrito pelas Equações [48] a [50], determine $e^{t\mathbf{a}}$ se $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

28. (*a*) Determine as equações na forma normal para o circuito da Figura 19.30. Seja $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$. (*b*) Determine os autovalores de $\mathbf{a}$. (*c*) Determine u_0 e u_1. (*d*) Especifique $e^{t\mathbf{a}}$. (*e*) Use $e^{t\mathbf{a}}$ para determinar $\mathbf{q}$ para $t > 0$.



◀ **FIGURA 19.30**