

Circuitos magnéticos e materiais magnéticos

O objetivo deste livro é o estudo dos dispositivos usados na interconversão de energias elétrica e mecânica. É dada ênfase às máquinas rotativas eletromagnéticas, pois é através delas que ocorre a maior parte dessa conversão. No entanto, as técnicas desenvolvidas aplicam-se genericamente a uma larga faixa de outros dispositivos, como máquinas lineares, atuadores e sensores.

Mesmo não sendo um dispositivo de conversão eletromecânica de energia, o transformador é um importante componente do processo global de conversão energética e será discutido no Capítulo 2. Como com a maioria dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia discutidos neste livro, os enrolamentos com acoplamento magnético estão na natureza do funcionamento do transformador. Por essa razão, as técnicas desenvolvidas para sua análise formam a base da discussão que se segue sobre máquinas elétricas.

Praticamente todos os transformadores e máquinas elétricas usam material ferromagnético para direcionar e dar forma a campos magnéticos, os quais atuam como meio de transferência e conversão de energia. Materiais magnéticos permanentes, ou ímãs, também são muito usados. Sem esses materiais, não seriam possíveis as implementações práticas da maioria dos dispositivos eletromecânicos familiares de conversão de energia. A capacidade de analisar e descrever sistemas que contenham esses materiais é essencial ao projeto e entendimento desses dispositivos.

Este capítulo desenvolverá algumas ferramentas básicas para a análise de sistemas que usam campos magnéticos. Dará também uma breve introdução às propriedades dos materiais magnéticos usados na prática. No Capítulo 2, esses resultados serão aplicados à análise de transformadores e, nos capítulos seguintes, serão usados na análise de máquinas rotativas.

Neste livro, supõe-se que o leitor tenha um conhecimento básico da teoria de campos magnéticos e elétricos, tal como é dada em disciplinas básicas de física para estudantes de engenharia. É possível que alguns leitores já tenham cursado uma disciplina sobre a teoria do campo eletromagnético com base nas equações de Maxwell. Entretanto, uma compreensão profunda das equações de Maxwell não é um pré-requisito para o estudo deste livro. As técnicas de análise de circuitos magnéticos representam aproximações algébricas das soluções exatas da teoria de campo. São

muito utilizadas no estudo dos dispositivos eletromecânicos de conversão de energia, e formam a base da maioria das análises apresentadas aqui.

1.1 Introdução aos circuitos magnéticos

Em engenharia, a solução detalhada dos campos magnéticos da maioria das aplicações de interesse prático envolve a solução das equações de Maxwell, juntamente com várias relações constitutivas que descrevem as propriedades dos materiais. Embora, na prática, muitas vezes as soluções exatas não sejam alcançáveis, diversas suposições simplificadoras permitem obter soluções úteis em engenharia.¹

Começamos supondo que, para os sistemas considerados neste livro, as frequências e os tamanhos envolvidos são tais que o termo da corrente de deslocamento das equações de Maxwell pode ser desprezado. Esse termo, associado à radiação eletromagnética, é responsável pelos campos magnéticos que ocorrem no espaço e são produzidos por campos elétricos variáveis no tempo. Desprezando esse termo, obtém-se a forma magnética quase estática das equações de Maxwell, relacionando os campos magnéticos às correntes que os produzem.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.1)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1.2)$$

A Eq. 1.1, muitas vezes referida como *Lei de Ampère*, afirma que a integral de linha da componente tangencial da *intensidade de campo magnético* \mathbf{H} ao longo de um contorno fechado C é igual à corrente total que passa através de qualquer superfície S delimitada por esse contorno. Na Eq. 1.1, vemos que a origem de \mathbf{H} é a *densidade de corrente* \mathbf{J} . A Eq. 1.2, frequentemente referida como *Lei de Gauss dos campos magnéticos*, afirma que a *densidade de fluxo magnético* \mathbf{B} é conservada, ou seja, em uma superfície fechada, não há entrada nem saída líquida de fluxo (isso equivale a afirmar que cargas magnéticas monopolares de campos magnéticos não existem). Dessas equações, vemos que as grandezas de um campo magnético podem ser determinadas usando apenas os valores instantâneos das correntes que lhe dão origem, e que as variações no tempo dos campos magnéticos resultam diretamente das variações no tempo das fontes.

Uma segunda suposição simplificadora envolve o conceito de circuito magnético. A solução genérica da intensidade de campo magnético \mathbf{H} e da densidade de fluxo magnético \mathbf{B} , em uma estrutura de geometria complexa, é muito difícil. No entanto, em muitas aplicações práticas, incluindo a análise de muitos tipos de máquinas elétricas, um problema de campo tridimensional pode em geral ser reduzido ao que é essencialmente um circuito equivalente unidimensional, dando soluções de exatidão aceitável em engenharia.

¹ As soluções numéricas baseadas em computador e no método dos elementos finitos fundamentam uma série de programas comerciais e tornaram-se ferramentas indispensáveis de análise e projeto. Geralmente, essas técnicas são melhor utilizadas para refinar as análises iniciais baseadas em métodos analíticos tais como as encontradas neste livro. Como seu uso pouco contribui para uma compreensão dos princípios fundamentais e do desempenho básico das máquinas elétricas, elas não serão discutidas neste livro.

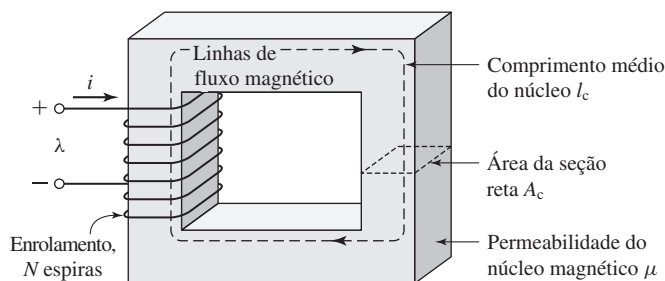


Figura 1.1 Circuito magnético simples. λ é o fluxo concatenado do enrolamento como definido na Seção 1.2.

Um circuito magnético consiste em uma estrutura que, em sua maior parte, é composta por material magnético de permeabilidade elevada.² A presença de um material de alta permeabilidade tende a confinar o fluxo magnético aos caminhos delimitados pela estrutura, do mesmo modo que, em um circuito elétrico, as correntes são confinadas aos condutores. O uso desse conceito de circuito magnético será ilustrado nesta seção e, ao longo do livro, veremos como ele se aplica muito bem a diversas situações.³

Um exemplo simples de um circuito magnético está mostrado na Fig. 1.1. Assume-se que o núcleo é composto de material magnético cuja *permeabilidade magnética* μ é muito maior que a do ar ($\mu \gg \mu_0$), em que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m é a permeabilidade no vácuo. O núcleo tem seção reta uniforme e é excitado por um enrolamento de N espiras conduzindo uma corrente de i ampères. Esse enrolamento produz um campo magnético no núcleo, como mostra na figura.

Devido à alta permeabilidade do núcleo magnético, uma solução exata mostraria que o fluxo magnético está confinado quase inteiramente ao núcleo. Mostraria também que as linhas de campo seguem o caminho definido pelo núcleo e que basicamente a densidade de fluxo é uniforme em uma seção reta qualquer, porque a área desta é uniforme. O campo magnético pode ser visualizado em termos de linhas de fluxo formando laços fechados interligados com o enrolamento.

No caso do circuito magnético da Fig. 1.1, a fonte do campo magnético do núcleo é o produto Ni , em ampères-espiras (A-e). Na terminologia dos circuitos magnéticos, Ni é a *força magnetomotriz* (FMM) \mathcal{F} que atua no circuito magnético. Embora a Fig. 1.1 mostre apenas uma única bobina, os transformadores e a maioria das máquinas rotativas têm no mínimo dois enrolamentos, e Ni deve ser substituído pela soma algébrica dos ampères-espiras de todos os enrolamentos.

O *fluxo magnético* líquido ϕ que atravessa uma superfície S é a integral de superfície da componente normal de \mathbf{B} ; assim

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.3)$$

² Em sua forma mais simples, a permeabilidade magnética pode ser entendida como uma razão entre a densidade de fluxo magnético B e a intensidade de campo magnético H .

³ Para um tratamento mais amplo dos circuitos magnéticos, veja A.E.Fitzgerald, D.E. Higgenbotham, e A. Grabel, *Basic Electrical Engineering*, 5ª ed., McGraw-Hill, 1981, Capítulo 13; também E.E. Staff, M.I.T., *Magnetic Circuits and Transformers*, M.I.T. Press, Capítulos 1 a 3.

Em unidades SI, a unidade de ϕ é o *weber* (Wb).

A Eq. 1.2 afirma que o fluxo magnético líquido que entra ou sai de uma superfície fechada (igual à integral de superfície de \mathbf{B} sobre a superfície fechada) é zero. Isso equivale a dizer que todo fluxo que entrar em uma superfície que delimita um volume deverá deixar esse volume passando por uma outra região dessa superfície porque as linhas de fluxo magnético formam laços fechados. Como um pouco de fluxo “escapa” pelos lados do circuito magnético da Fig. 1.1, esse resultado mostra que o fluxo líquido é o mesmo através de qualquer seção reta do núcleo.

Em um circuito magnético desse tipo, é comum assumir que a densidade de fluxo magnético (e, conseqüentemente, a intensidade de campo magnético) é uniforme em qualquer seção reta ao longo do núcleo. Nesse caso, a Eq. 1.3 reduz-se simplesmente à equação escalar*

$$\phi_c = B_c A_c \quad (1.4)$$

em que

ϕ_c = fluxo no núcleo

B_c = densidade do fluxo do núcleo

A_c = Área da seção reta do núcleo

Da Eq. 1.1, a relação entre a FMM que atua em um circuito magnético e a intensidade de campo magnético naquele circuito é⁴

$$\mathcal{F} = Ni = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad (1.5)$$

As dimensões do núcleo são tais que o comprimento do caminho de qualquer linha de fluxo é aproximadamente igual ao comprimento médio do núcleo l_c . Como resultado, a integral de linha da Eq. 1.5 torna-se simplesmente o produto escalar $H_c l_c$ do módulo de \mathbf{H} vezes o comprimento médio l_c do caminho de fluxo. Assim, a relação entre a FMM e a intensidade de campo magnético pode ser escrita, na terminologia dos circuitos magnéticos, como

$$\mathcal{F} = Ni = H_c l_c \quad (1.6)$$

em que H_c é o módulo médio de \mathbf{H} no núcleo.

O sentido de H_c no núcleo pode ser encontrado a partir da *regra da mão direita*, que pode ser enunciada de dois modos equivalentes. (1) Imagine uma corrente sendo transportada em um condutor segurada pela mão direita, com o polegar apontando no sentido da corrente. Então, os demais dedos apontarão no sentido do campo magnético criado por essa corrente. (2) De forma equivalente, se a bobina da Fig. 1.1 for segurada na mão direita (figurativamente falando), com os dedos apontando no sentido da corrente, então o polegar apontará no sentido do campo magnético.

* N. de T.: O índice c refere-se a núcleo (*core*, em inglês).

⁴ Em geral, a queda de FMM em um determinado segmento de um circuito magnético pode ser calculada como sendo $\int \mathbf{H} d\mathbf{l}$ aplicada a esse trecho do circuito magnético.

A relação entre a intensidade de campo magnético \mathbf{H} e a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} é uma propriedade do material em que se encontra o campo magnético. Costuma-se supor uma relação linear. Assim, temos

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{1.7}$$

em que μ é conhecida como permeabilidade magnética do material. Em unidades do SI, \mathbf{H} é medida em ampères por metro, \mathbf{B} em webers por metro quadrado ou, como também é conhecida, em teslas (T) e μ em webers por ampère-espira-metro ou, de forma equivalente, em henrys por metro. Em unidades do SI, a permeabilidade do vácuo é $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henrys por metro. A permeabilidade dos materiais magnéticos lineares pode ser expressa em termos de sua permeabilidade relativa μ_r , ou seja, seu valor relativo ao do vácuo, ou $\mu = \mu_r \mu_0$. Valores típicos de μ_r variam de 2.000 a 80.000 para os materiais usados em transformadores e máquinas rotativas. As características dos materiais ferromagnéticos estão descritas nas Seções 1.3 e 1.4. Por enquanto, vamos assumir que μ_r seja uma constante conhecida, embora na realidade varie significativamente em função do valor da densidade de fluxo magnético.

Os transformadores são enrolados em núcleos fechados como o da Fig. 1.1. No entanto, os dispositivos de conversão de energia que contêm um elemento móvel devem incluir entreferros de ar em seus circuitos magnéticos. Um circuito magnético com um entreferro de ar está mostrado na Fig. 1.2. Quando o comprimento do entreferro g^* for muito menor do que as dimensões das faces adjacentes do núcleo, o fluxo magnético ϕ_c seguirá o caminho definido pelo núcleo e pelo entreferro. Nesse caso, as técnicas de análise de circuitos magnéticos poderão ser usadas. Quando o comprimento do entreferro torna-se excessivamente grande, observa-se que o fluxo “escapa” ou “dispersa-se” pelos lados do entreferro, e as técnicas de análise de circuitos magnéticos não são mais rigorosamente aplicáveis.

Assim, desde que o comprimento do entreferro g seja suficientemente pequeno, a configuração da Fig. 1.2 pode ser analisada como um circuito magnético com dois componentes em série, ambos conduzindo o mesmo fluxo ϕ : um núcleo magnético de permeabilidade μ , área de seção reta A_c e comprimento médio l_c , e um entreferro de permeabilidade μ_0 , área de seção reta A_g e comprimento g . No núcleo,

$$B_c = \frac{\phi}{A_c} \tag{1.8}$$

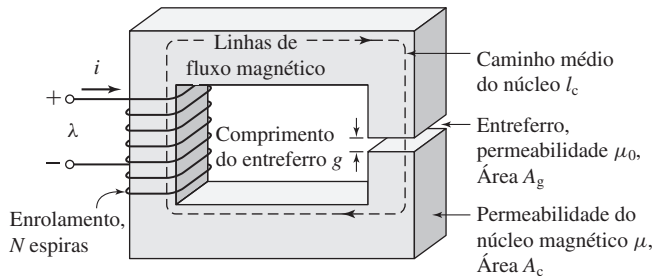


Figura 1.2 Circuito magnético com entreferro de ar.

* N. de T.: O índice g refere-se a entreferro (*gap*, em inglês).

e, no entreferro,

$$B_g = \frac{\phi}{A_c} \quad (1.9)$$

A aplicação da Eq. 1.5 a esse circuito magnético produz

$$\mathcal{F} = H_c l_c + H_g g \quad (1.10)$$

e, usando a relação linear B - H da Eq. 1.7, obtém-se

$$\mathcal{F} = \frac{B_c}{\mu} l_c + \frac{B_g}{\mu_0} g \quad (1.11)$$

Aqui a $\mathcal{F} = Ni$ é a FMM aplicada ao circuito magnético. Da Eq. 1.10, vemos que uma parte da FMM, $\mathcal{F}_c = H_c l_c$, é necessária para produzir campo magnético no núcleo, ao passo que o restante, $\mathcal{F}_g = H_g g$, produz campo magnético no entreferro.

Com os materiais magnéticos usados na prática (como foi discutido nas Seções 1.3 e 1.4), B_c e H_c nem sempre se relacionam entre si de maneira simples através de uma permeabilidade constante conhecida μ , como descrito pela Eq. 1.7. De fato, B_c é muitas vezes uma função não linear plurívoca de H_c . Assim, embora a Eq. 1.10 continue sendo verdadeira, ela não conduz diretamente a uma expressão simples que relacione a FMM com as densidades de fluxo, como na Eq. 1.11. Em vez disso, devem ser usados, gráfica ou analiticamente, os detalhes específicos da relação não linear B_c - H_c . No entanto, em muitos casos, o conceito de permeabilidade constante aplicada a um material dá resultados de exatidão aceitável em engenharia, sendo usado com frequência.

Das Eqs. 1.8 e 1.9, a Eq. 1.11 pode ser reescrita em termos do fluxo ϕ_c como

$$\mathcal{F} = \phi \left(\frac{l_c}{\mu A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g} \right) \quad (1.12)$$

Os termos que multiplicam o fluxo nessa equação são conhecidos como *relutâncias* (\mathcal{R}) do núcleo e do entreferro, respectivamente,

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu A_c} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_g} \quad (1.14)$$

e, assim,

$$\mathcal{F} = \phi (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g) \quad (1.15)$$

Finalmente, pode-se isolar o fluxo na Eq. 1.15, obtendo-se

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} \quad (1.16)$$

ou

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\frac{l_c}{\mu A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g}} \quad (1.17)$$

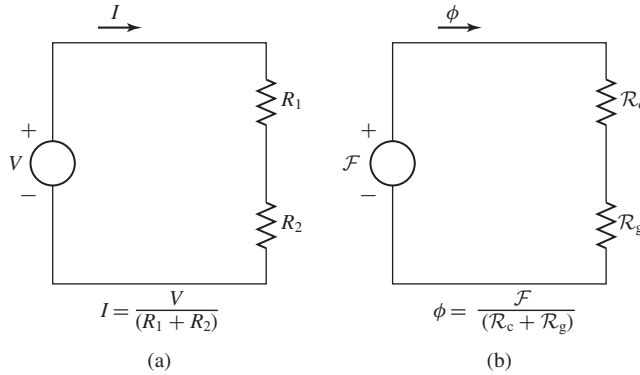


Figura 1.3 Analogia entre circuitos elétrico e magnético. (a) Circuito elétrico, (b) circuito magnético.

Em geral, para qualquer circuito magnético de relutância total \mathcal{R}_{tot} , o fluxo pode ser encontrado como

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.18)$$

O termo que multiplica a FMM é conhecido como *permeância* \mathcal{P} e é o inverso da relutância. Assim, por exemplo, a permeância total de um circuito magnético é

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{1}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.19)$$

Observe que as Eqs. 1.15 e 1.16 são análogas às relações entre corrente e tensão em um circuito elétrico. Essa analogia está ilustrada na Fig. 1.3. A Fig. 1.3a mostra um circuito elétrico em que uma tensão V impulsiona uma corrente I através dos resistores R_1 e R_2 . A Fig. 1.3b mostra a representação esquemática equivalente do circuito magnético da Fig. 1.2. Vemos aqui que a FMM \mathcal{F} (análoga à tensão no circuito elétrico) impulsiona um fluxo ϕ (análogo à corrente no circuito elétrico) através da combinação das relutâncias do núcleo \mathcal{R}_c e do entreferro \mathcal{R}_g . Frequentemente, essa analogia entre as soluções de circuitos magnéticos e elétricos pode ser explorada para se obter as soluções dos fluxos em circuitos magnéticos de grande complexidade.

A fração de FMM necessária para impulsionar o fluxo através de cada parte do circuito magnético, em geral referida como *queda de FMM* naquela parte do circuito magnético, varia proporcionalmente à sua relutância (em analogia direta com a queda de tensão em um elemento resistivo de um circuito elétrico). Considere o circuito magnético da Fig. 1.2. Da Eq. 1.13 vemos que uma alta permeabilidade no material pode resultar em uma baixa relutância de núcleo. Esta pode ser tornada muito inferior à do entreferro: para $(\mu A_c / l_c) \gg (\mu_0 A_g / g)$, $\mathcal{R}_c \ll \mathcal{R}_g$ e assim $\mathcal{R}_{\text{tot}} \approx \mathcal{R}_g$. Nesse caso, a relutância do núcleo pode ser desprezada e o fluxo pode ser obtido da Eq. 1.16 em termos de apenas \mathcal{F} e das propriedades do entreferro:

$$\phi \approx \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_g} = \frac{\mathcal{F} \mu_0 A_g}{g} = Ni \frac{\mu_0 A_g}{g} \quad (1.20)$$

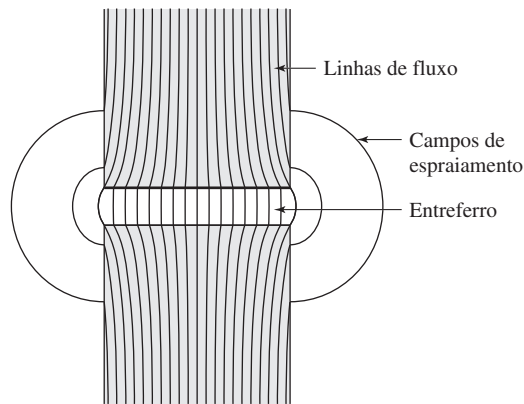


Figura 1.4 Campos de espraioamento no entreferro.

Como será visto na Seção 1.3, na prática, os materiais magnéticos têm permeabilidades que não são constantes, mas que variam de acordo com o nível do fluxo. Das Eqs. 1.13 a 1.16, vemos que, enquanto essa permeabilidade permanecer suficientemente elevada, a sua variação não afetará de forma significativa o desempenho do circuito magnético.

Nos sistemas reais, as linhas de campo magnético “espraiaem-se” um pouco para fora quando cruzam o entreferro, como ilustrado na Fig. 1.4. Se esse efeito de espraioamento não for excessivo, o conceito de circuito magnético continuará aplicável. O efeito desses *campos de espraioamento* é aumentar a área efetiva A_g da seção reta do entreferro. Diversos métodos empíricos foram desenvolvidos para levar em conta esse efeito. Em entreferros delgados, uma correção para esses campos de espraioamento pode ser feita acrescentando-se o comprimento do entreferro a cada uma de suas duas dimensões, alterando assim a área de sua seção reta. Neste livro, o efeito dos campos de espraioamento é em geral ignorado e, nesse caso, então $A_g = A_c$.

Normalmente, os circuitos magnéticos podem consistir em múltiplos elementos em série e em paralelo. Para completar a analogia entre circuitos elétricos e magnéticos, podemos generalizar a Eq. 1.5 para

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_k \mathcal{F}_k = \sum_k H_k l_k \quad (1.21)$$

em que \mathcal{F} é a FMM (total de ampères-espiras), que atua para impulsionar o fluxo em um laço fechado de um circuito magnético, e $\mathcal{F}_k = H_k l_k$ é a *queda de FMM* no k -ésimo elemento daquele laço. Isso está em analogia direta com a lei das tensões de Kirchhoff aplicada a circuitos elétricos constituídos por fontes de tensão e resistores

$$V = \sum_k R_k i_k \quad (1.22)$$

em que V é a fonte de tensão que impulsiona a corrente em uma malha e $R_k i_k$ é a queda de tensão no k -ésimo elemento resistivo daquele laço.

De modo semelhante, a equação da lei das correntes de Kirchoff

$$\sum_n i_n = 0 \quad (1.23)$$

a qual afirma que a corrente líquida, isto é, a soma das correntes que entram em um nó de um circuito elétrico é zero, tem como análoga a equação

$$\sum_n \phi_n = 0 \quad (1.24)$$

a qual afirma que o fluxo líquido em um nó de um circuito magnético é zero.

Assim, descrevemos os princípios básicos para reduzir um problema de campo magnético quase estático de geometria simples a um *modelo de circuito magnético*. O objetivo limitado desta seção é introduzir a terminologia e alguns dos conceitos usados pelos engenheiros para resolver problemas práticos de projeto. Devemos enfatizar que esse tipo de pensamento depende muito do raciocínio e da intuição próprios de engenharia. Por exemplo, deixamos implícita a suposição de que a permeabilidade das partes de “ferro” do circuito magnético seja uma quantidade conhecida constante, embora muitas vezes isso não seja verdadeiro (veja a Seção 1.3), e que o campo magnético esteja confinado unicamente ao núcleo e a seus entreferros. Embora trate-se de uma boa suposição para muitas situações, também é verdadeiro que as correntes dos enrolamentos produzem campos magnéticos fora do núcleo. Como veremos, quando dois ou mais enrolamentos são colocados em um campo magnético, como ocorre no caso de transformadores e máquinas rotativas, esses campos externos ao núcleo, conhecidos como *campos de dispersão*, não podem ser ignorados e afetam de forma significativa o desempenho do dispositivo.

Exemplo 1.1

O circuito magnético mostrado na Fig. 1.2 tem as dimensões $A_c = A_g = 9 \text{ cm}^2$, $g = 0,050 \text{ cm}$, $l_c = 30 \text{ cm}$ e $N = 500$ espiras. Suponha o valor $\mu_r = 70.000$ para o material do núcleo. (a) Encontre as relutâncias \mathcal{R}_c e \mathcal{R}_g . Dada a condição de que o circuito magnético esteja operando com $B_c = 1,0 \text{ T}$, encontre (b) o fluxo ϕ e (c) a corrente i .

Solução

a. As relutâncias podem ser obtidas das Eqs. 1.13 e 1.14:

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{70.000 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 3,79 \times 10^3 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_g} = \frac{5 \times 10^{-4}}{(4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 4,42 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

b. Da Eq. 1.4,

$$\phi = B_c A_c = 1,0 (9 \times 10^{-4}) = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

c. Das Eqs. 1.6 e 1.15,

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{\phi(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g)}{N} = \frac{9 \times 10^{-4}(4,46 \times 10^5)}{500} = 0,80 \text{ A}$$

Problema prático 1.1

Encontre o fluxo ϕ e a corrente para o Exemplo 1.1 se (a) o número de espiras for dobrado para $N = 1000$ espiras, mantendo-se as mesmas dimensões, e (b) se o número de espiras for $N = 500$ e o entreferro for reduzido a 0,040 cm.

Solução

- a. $\phi = 9 \times 10^{-4}$ Wb e $i = 0,40$ A
 b. $\phi = 9 \times 10^{-4}$ Wb e $i = 0,64$ A

Exemplo 1.2

A estrutura magnética de uma máquina síncrona está mostrada esquematicamente na Fig. 1.5. Assumindo que o ferro do rotor e do estator têm permeabilidade infinita ($\mu \rightarrow \infty$), encontre o fluxo ϕ do entreferro e a densidade de fluxo B_g . Neste exemplo, $I = 10$ A, $N = 1000$ espiras, $g = 1$ cm e $A_g = 200$ cm².

Solução

Observe que há dois entreferros em série, de comprimento total $2g$, e que por simetria a densidade de fluxo em cada um é igual. Como assumimos que a permeabilidade do ferro é infinita, a sua relutância é desprezível e a Eq. 1.20 (com g substituído pelo comprimento total de entreferro $2g$) pode ser usada para encontrar o fluxo

$$\phi = \frac{NI\mu_0 A_g}{2g} = \frac{1000(10)(4\pi \times 10^{-7})(0,02)}{0,02} = 12,6 \text{ m Wb}$$

e

$$B_g = \frac{\phi}{A_g} = \frac{0,0126}{0,02} = 0,630 \text{ T}$$

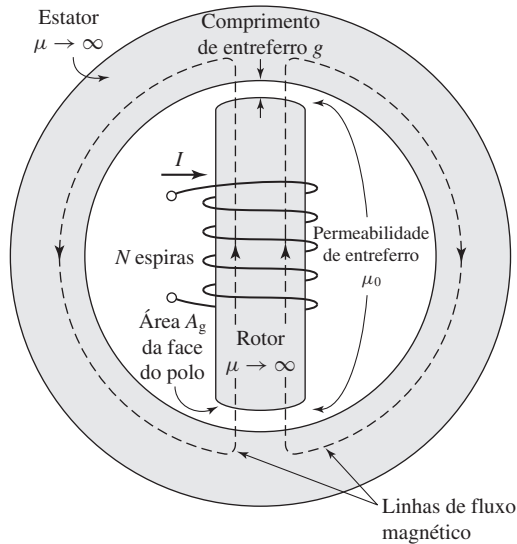


Figura 1.5 Máquina síncrona simples.

Problema prático 1.2

Para a estrutura magnética da Fig. 1.5 com as dimensões dadas no Exemplo 1.2, observa-se que a densidade de fluxo do entreferro é $B_g = 0,9$ T. Encontre o fluxo de entreferro ϕ e, para uma bobina de $N = 500$ espiras, a corrente necessária para produzir esse valor de fluxo no entreferro.

Solução

$$\phi = 0,018 \text{ Wb e } i = 28,6 \text{ A.}$$

1.2 Fluxo concatenado, indutância e energia

Quando um campo magnético varia no tempo, produz-se um campo elétrico no espaço de acordo com outra equação de Maxwell, conhecida como *lei de Faraday*:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{1.25}$$

A Eq. 1.25 afirma que a integral de linha da *intensidade de campo elétrico* \mathbf{E} ao longo de um contorno fechado C é igual à razão, no tempo, da variação de fluxo magnético que concatena (ou seja, passa através) aquele contorno. Em estruturas magnéticas, com enrolamentos de alta condutividade elétrica, como na Fig. 1.2, pode-se mostrar que o campo \mathbf{E} no fio é extremamente pequeno podendo ser desprezado, de modo que o primeiro membro da Eq. 1.25 reduz-se ao negativo da *tensão induzida*⁵ e nos terminais do enrolamento. Além disso, no segundo membro da Eq. 1.25 predomina o fluxo do núcleo ϕ . Como o enrolamento (e, portanto, o contorno C) concatena o fluxo do núcleo N vezes, a Eq. 1.25 reduz-se a

$$e = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \tag{1.26}$$

em que λ é o *fluxo concatenado* do enrolamento. Ele é definido como

$$\lambda = N\phi \tag{1.27}$$

O fluxo concatenado é medido em webers (ou de forma equivalente em webers-espiras). Observe que escolhemos o símbolo ϕ para indicar o valor instantâneo de um fluxo variável no tempo.

Em geral, o fluxo concatenado de uma bobina é igual à integral de superfície da componente normal de densidade do fluxo magnético. A integração é realizada sobre qualquer superfície delimitada pela bobina. Observe que o sentido da tensão induzida e é definido pela Eq. 1.25 de modo que, se os terminais do enrolamento fossem curto-circuitados, uma corrente circularia em um sentido tal que se oporia à variação do fluxo concatenado.

⁵ Frequentemente, a expressão *força eletromotiva* (FEM) é usada no lugar de tensão induzida para representar a componente de tensão referente a um fluxo concatenado variável no tempo.

Em um circuito magnético composto de material magnético de permeabilidade constante ou que inclua um entreferro dominante, a relação entre λ e i será linear e poderemos definir a *indutância* L como

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (1.28)$$

A substituição das Eqs. 1.5, 1.18 e 1.27 na Eq. 1.28 produz

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.29)$$

Dessa equação, podemos ver que a indutância de um enrolamento em um circuito magnético é proporcional ao quadrado das espiras e inversamente proporcional à relutância do circuito magnético associado a esse enrolamento.

Por exemplo, a partir da Eq. 1.20, supondo que a relutância do núcleo seja desprezível em comparação com a do entreferro, a indutância do enrolamento da Fig. 1.2 será igual a

$$L = \frac{N^2}{(g/\mu_0 A_g)} = \frac{N^2 \mu_0 A_g}{g} \quad (1.30)$$

A indutância é medida em *henrys* (H) ou *webers-espiras por ampère*. A Eq. 1.30 mostra a estrutura dimensional das expressões de indutância. Ela é proporcional ao quadrado do número de espiras, a uma permeabilidade magnética, a uma área de seção reta e inversamente proporcional a um comprimento. Deve-se enfatizar que, estritamente falando, o conceito de indutância requer uma relação linear entre fluxo e FMM. Assim, ela não pode ser aplicada com rigor a situações em que as características não lineares dos materiais magnéticos, como discutido nas Seções 1.3 e 1.4, predominem no desempenho do sistema magnético. No entanto, em muitas situações de interesse prático, a relutância do sistema é dominada pela do entreferro (que é linear), e os efeitos não lineares dos materiais magnéticos podem ser ignorados. Em outros casos, pode ser perfeitamente aceitável assumir um valor médio para a permeabilidade magnética do material do núcleo, calculando-se em seguida uma indutância média correspondente, que pode ser usada com exatidão razoável em cálculos de engenharia. O Exemplo 1.3 ilustra o primeiro caso e o Exemplo 1.4, o último.

Exemplo 1.3

O circuito magnético da Fig. 1.6a é constituído por uma bobina de N espiras enroladas em um núcleo magnético, de permeabilidade infinita, com dois entreferros paralelos de comprimentos g_1 e g_2 , e áreas A_1 e A_2 , respectivamente.

Encontre (a) a indutância do enrolamento e (b) a densidade de fluxo B_1 no entreferro 1 quando o enrolamento está conduzindo uma corrente i . Despreze os efeitos de espraiamento no entreferro.

Solução

- a. O circuito equivalente da Fig. 1.6b mostra que a relutância total é igual à combinação em paralelo das relutâncias dos dois entreferros. Assim,

$$\phi = \frac{Ni}{\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}}$$

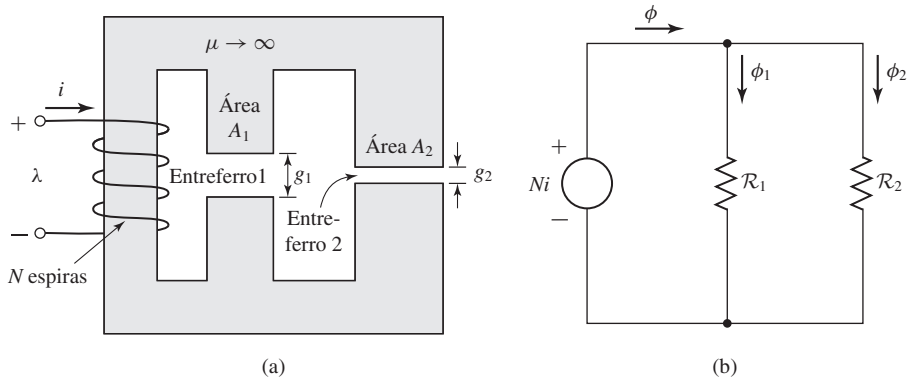


Figura 1.6 (a) Circuito magnético e (b) circuito equivalente para o Exemplo 1.3.

em que

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 A_1} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{g_2}{\mu_0 A_2}$$

Da Eq. 1.28,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} \\ &= \mu_0 N^2 \left(\frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) \end{aligned}$$

b. Do circuito equivalente, pode-se ver que

$$\phi_1 = \frac{Ni}{\mathcal{R}_1} = \frac{\mu_0 A_1 Ni}{g_1}$$

e, assim,

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A_1} = \frac{\mu_0 Ni}{g_1}$$

Exemplo 1.4

No Exemplo 1.1, assume-se que a permeabilidade relativa do material do núcleo do circuito magnético da Fig. 1.2 é $\mu_r = 70.000$ para uma densidade de fluxo de 1,0 T.

- Em um dispositivo real, o núcleo poderia ser construído de aço elétrico, como o de tipo M-5 discutido na Seção 1.3. Esse material é altamente não linear e sua permeabilidade relativa (definida neste exemplo como a razão B/H) varia entre um valor de aproximadamente $\mu_r = 72.300$, para uma densidade de fluxo de $B = 1,0$ T, e um valor da ordem de $\mu_r = 2.900$, à medida que a densidade de fluxo eleva-se até 1,8 T. Calcule a indutância supondo que a permeabilidade relativa do aço do núcleo seja 72.300.
- Calcule a indutância supondo que a permeabilidade relativa seja 2.900.

Solução

- a. Das Eqs. 1.13 e 1.14 e baseando-se nas dimensões dadas no Exemplo 1.1, obtém-se

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{72.300 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 3,67 \times 10^3 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

ao passo que \mathcal{R}_g permanece inalterada, mantendo-se o valor calculado no Exemplo 1.1 como $\mathcal{R}_g = 4,42 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{e}/\text{Wb}$.

Assim, a relutância total do núcleo e do entreferro é

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g = 4,46 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

e, portanto, da Eq. 1.29

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} = \frac{500^2}{4,46 \times 10^5} = 0,561 \text{ H}$$

- b. Para $\mu_r = 2.900$, a relutância do núcleo aumenta de um valor de $3,79 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{e}/\text{Wb}$ para

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{2.900 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 9,15 \times 10^4 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

e, portanto, a relutância total aumenta de $4,46 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{e}/\text{Wb}$ para $5,34 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{e}/\text{Wb}$. Assim, da Eq. 1.29, a indutância diminui de 0,561 H para

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} = \frac{500^2}{5,34 \times 10^5} = 0,468 \text{ H}$$

Esse exemplo ilustra o efeito da linearização de um entreferro dominante em um circuito magnético. Apesar da redução de permeabilidade do ferro por um fator de $72.300/2.900 = 25$, a indutância diminui apenas de $0,468/0,561 = 0,83$, apenas porque a relutância do entreferro é significativamente maior que a do núcleo. Em muitas situações, é comum supor que a indutância seja constante, o que corresponde a uma permeabilidade de núcleo de valor finito e constante (ou, como em muitos casos, assumir simplesmente que $\mu_r \rightarrow \infty$). Análises baseadas nessa forma de representar um indutor em geral levam a resultados que estão dentro da faixa de exatidão aceitável em engenharia. Isso evita a enorme complicação decorrente da modelagem da não linearidade do material do núcleo.

Problema prático 1.3

Repita o cálculo de indutância do Exemplo 1.4 para uma permeabilidade relativa de $\mu_r = 30.000$.

Solução

$$L = 0,554 \text{ H}$$

Exemplo 1.5

Usando MATLAB,⁶ faça um gráfico da indutância do circuito magnético do Exemplo 1.1 e da Fig. 1.2 em função da permeabilidade do núcleo no intervalo $100 \leq \mu_r \leq 100.000$.

⁶ “MATLAB” é uma marca registrada da The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760, <http://www.mathworks.com>. Uma versão do MATLAB para estudantes está disponível.

Solução

O script de MATLAB é:

```

clc
clear

% Permeabilidade do vácuo
mu0 = pi*4.e-7;

%Todas as dimensões expressas em metros
Ac = 9e-4; Ag = 9e-4; g = 5e-4; lc = 0.3;
N = 500;

%Relutância do entreferro
Rg = g/(mu0*Ag);

mur = 1:100:100000;
Rc = lc./(mur*mu0*Ac);
Rtot = Rg+Rc;
L = N^2./Rtot;

plot(mur,L)
xlabel('Permeabilidade relativa do núcleo')
ylabel('Indutância [H]')
    
```

O gráfico resultante está mostrado na Fig. 1.7. Observe que a figura confirma claramente que, no circuito magnético deste exemplo, a indutância é bastante insensível à permeabilidade relativa enquanto esta não baixar até a ordem de 1000. Assim, enquanto a permeabilidade relativa efetiva do núcleo for “elevada” (neste caso, superior a 1000), qualquer não linearidade nas propriedades do núcleo terá um efeito pequeno nas propriedades finais do indutor.

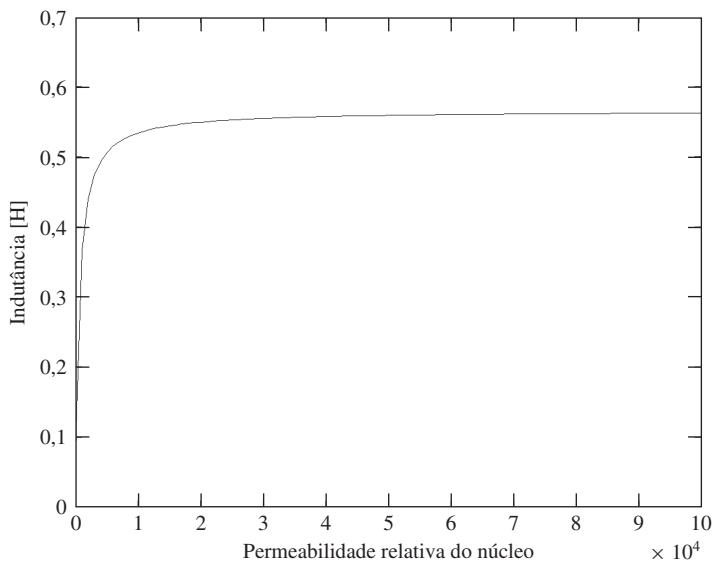


Figura 1.7 Gráfico de MATLAB da indutância versus a permeabilidade relativa do Exemplo 1.5.

Problema prático 1.4

Escreva um script de MATLAB para plotar a indutância do circuito magnético do Exemplo 1.1 com $\mu_r = 70.000$ em função do comprimento do entreferro, quando este varia de 0,01 cm até 0,10 cm.

A Fig. 1.8 mostra um circuito magnético com um entreferro e dois enrolamentos. Nesse caso, observe que a FMM do circuito magnético é dada pelo *total de ampères-espiras* que atua no circuito magnético (ou seja, o total líquido de ampères-espiras de ambos os enrolamentos) e que os sentidos de referência das correntes foram escolhidos de modo a produzirem fluxos no mesmo sentido. A FMM total é, portanto,

$$\mathcal{F} = N_1 i_1 + N_2 i_2 \tag{1.31}$$

e, da Eq. 1.20, desprezando a relutância do núcleo e assumindo que $A_c = A_g$, o fluxo do núcleo ϕ é

$$\phi = (N_1 i_1 + N_2 i_2) \frac{\mu_0 A_c}{g} \tag{1.32}$$

Na Eq. 1.32, ϕ é o *fluxo resultante no núcleo* produzido pela FMM total dos dois enrolamentos. É esse ϕ resultante que determina o ponto de operação do material do núcleo.

Se a Eq. 1.32 for decomposta em termos relacionados individualmente com cada corrente, o fluxo concatenado resultante da bobina 1 pode ser expresso como

$$\lambda_1 = N_1 \phi = N_1^2 \left(\frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_1 + N_1 N_2 \left(\frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_2 \tag{1.33}$$

que pode ser escrita como

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \tag{1.34}$$

em que

$$L_{11} = N_1^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \tag{1.35}$$

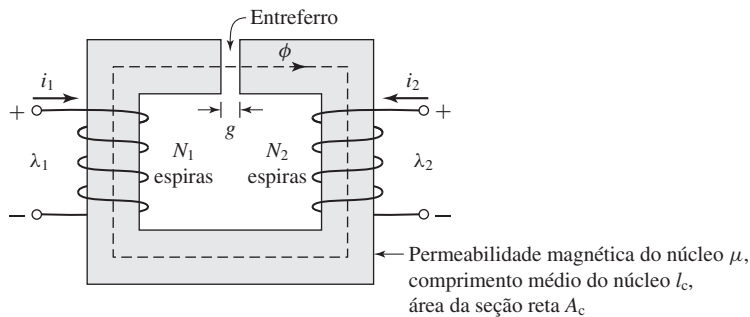


Figura 1.8 Circuito magnético com dois enrolamentos.

é a *indutância própria* (ou autoindutância) da bobina 1 e $L_{11}i_1$ é o fluxo concatenado da bobina 1 devido a sua própria corrente i_1 . A *indutância mútua* entre as bobinas 1 e 2 é

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.36)$$

e $L_{12}i_2$ é o fluxo concatenado da bobina 1 devido à corrente i_2 na outra bobina. Do mesmo modo, o fluxo concatenado da bobina 2 é

$$\lambda_2 = N_2 \phi = N_1 N_2 \left(\frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_1 + N_2^2 \left(\frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_2 \quad (1.37)$$

ou

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (1.38)$$

em que $L_{21} = L_{12}$ é a indutância mútua e

$$L_{22} = N_2^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.39)$$

é a indutância própria (ou autoindutância) da bobina 2.

É importante observar que a decomposição dos fluxos concatenados resultantes em duas componentes produzidas por i_1 e i_2 baseia-se na superposição dos efeitos individuais e, portanto, implica uma relação linear fluxo-FMM (característica de materiais de permeabilidade constante).

A substituição da Eq. 1.28 na Eq. 1.26 resulta em

$$e = \frac{d}{dt}(Li) \quad (1.40)$$

para o caso de um circuito magnético com um único enrolamento. Em um circuito magnético estático, a indutância é fixa (supondo que as não linearidades do material não causem variações na indutância). Então, essa equação reduz-se à forma familiar da teoria de circuitos

$$e = L \frac{di}{dt} \quad (1.41)$$

Frequentemente, no entanto, em dispositivos de conversão eletromecânica de energia, as indutâncias variam no tempo e a Eq. 1.40 deve ser escrita como

$$e = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (1.42)$$

Observe que, nos casos de enrolamentos múltiplos, o fluxo concatenado total de cada enrolamento deve ser usado na Eq. 1.26 para encontrar a tensão nos terminais do enrolamento.

Em um circuito magnético, a potência nos terminais de um enrolamento é uma medida da taxa com que o fluxo de energia flui para dentro do circuito naquele enrolamento em especial. A *potência* p é determinada pelo produto da tensão pela corrente

$$p = ie = i \frac{d\lambda}{dt} \quad (1.43)$$

e sua unidade é *watts* (W) ou *joules por segundo*. Assim, a variação da *energia magnética armazenada* ΔW no circuito magnético, durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2 , é

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i \, d\lambda \quad (1.44)$$

Em unidades SI, a energia magnética armazenada W é medida em *joules* (J).

No caso de um sistema de enrolamento único e indutância constante, a variação da energia magnética armazenada, quando o nível do fluxo varia de λ_1 a λ_2 , pode ser escrita como

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i \, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{L} \, d\lambda = \frac{1}{2L}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (1.45)$$

A energia magnética total armazenada, para qualquer valor de λ , pode ser obtida fazendo-se λ_1 igual a zero:

$$W = \frac{1}{2L}\lambda^2 = \frac{L}{2}i^2 \quad (1.46)$$

Exemplo 1.6

No circuito magnético do Exemplo 1.1 (Fig. 1.2), encontre (a) a indutância L , (b) a energia magnética armazenada W quando $B_c = 1,0$ T e (c) a tensão induzida e para um fluxo de núcleo, que varia no tempo a 60 Hz, dado por $B_c = 1,0 \sin \omega t$ T em que $\omega = (2\pi)(60) = 377$.

Solução

- a. Das Eqs. 1.16 e 1.28 e do Exemplo 1.1,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} \\ &= \frac{500^2}{4,46 \times 10^5} = 0,56 \text{ H} \end{aligned}$$

Observe que a relutância do núcleo é muito menor que a do entreferro ($\mathcal{R}_c \ll \mathcal{R}_g$). Assim, dentro de uma boa aproximação, a indutância é dominada pela relutância do entreferro, isto é,

$$L \approx \frac{N^2}{\mathcal{R}_g} = 0,57 \text{ H}$$

- b. No Exemplo 1.1 encontramos que, quando $B_c = 1,0$ T, então $i = 0,80$ A. Portanto, da Eq. 1.46,

$$W = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(0,56)(0,80)^2 = 0,18 \text{ J}$$

- c. Da Eq. 1.26 e do Exemplo 1.1,

$$\begin{aligned} e &= \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} = NA_c \frac{dB_c}{dt} \\ &= 500 \times (9 \times 10^{-4}) \times (377 \times 1,0 \cos(377t)) \\ &= 170 \cos(377t) \quad \text{V} \end{aligned}$$

Problema prático 1.5

Repita o Exemplo 1.6 para $B_c = 0,8$ T, supondo que o fluxo do núcleo varie a 50 Hz, em vez de 60 Hz.

Solução

- a. A indutância L permanece inalterada.
 - b. $W = 0,115$ J
 - c. $e = 113 \cos(314t)$ V
-

1.3 Propriedades dos materiais magnéticos

No contexto dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia, a importância dos materiais magnéticos é dupla. Com seu uso, é possível obter densidades elevadas de fluxo magnético com níveis relativamente baixos de força magnetizante. Como as forças magnéticas e a densidade de energia elevam-se com o aumento da densidade de fluxo, esse efeito tem um papel enorme no desempenho dos dispositivos de conversão de energia.

Além disso, os materiais magnéticos podem ser usados para delimitar e direcionar os campos magnéticos, dentro de caminhos bem definidos. Em transformadores, são usados para maximizar o acoplamento entre os enrolamentos, assim como para diminuir a corrente de excitação requerida para operar o transformador. Em máquinas elétricas, os materiais magnéticos são usados para dar forma aos campos de modo que seja produzido o conjugado desejado e obtidas as características elétricas específicas desejadas nos terminais.

Os *materiais ferromagnéticos*, normalmente compostos de ferro e de ligas de ferro com cobalto, tungstênio, níquel, alumínio e outros metais, são de longe os materiais magnéticos mais comuns. Ainda que esses materiais sejam caracterizados por uma ampla faixa de propriedades, os fenômenos básicos responsáveis por suas propriedades são comuns a todos eles.

Observa-se que os materiais ferromagnéticos são compostos por um grande número de domínios, isto é, regiões nas quais os momentos magnéticos de todos os átomos estão em paralelo, dando origem a um momento magnético líquido naquele domínio. Em uma amostra não magnetizada do material, os momentos magnéticos dos domínios estão orientados aleatoriamente e o fluxo magnético líquido resultante no material é zero.

Quando uma força magnetizante externa é aplicada a esse material, os momentos dos domínios magnéticos tendem a se alinhar com o campo magnético aplicado. Como resultado, os momentos magnéticos dos domínios somam-se ao campo aplicado, produzindo um valor muito mais elevado de densidade de fluxo do que aquele que existiria devido apenas à força magnetizante. Assim, a *permeabilidade efetiva* μ , igual à razão entre a densidade de fluxo magnético total e a intensidade do campo magnético aplicado, é elevada em comparação com a permeabilidade do vácuo μ_0 . À medida que a força magnetizante aumenta, esse comportamento continua até que todos os momentos magnéticos estejam alinhados com o campo aplicado. Nesse ponto, eles não podem mais contribuir para o aumento da densidade do fluxo magnético, e diz-se que o material está completamente *saturado*.

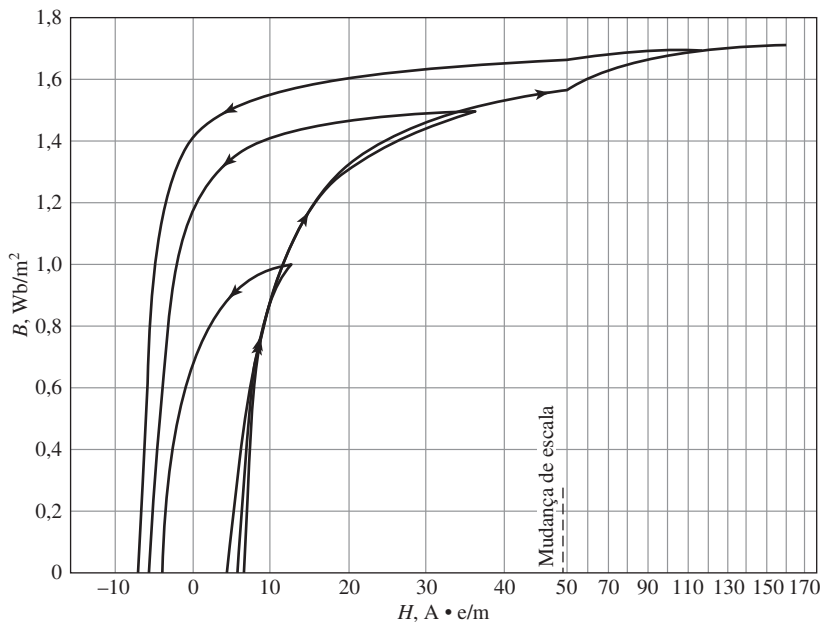


Figura 1.9 Laços B - H para aço elétrico de grão orientado, tipo M-5, de 0,012 polegadas de espessura. Apenas as metades superiores dos laços são mostrados aqui. (Armco Inc.)

Na ausência de uma força magnetizante externamente aplicada, os momentos magnéticos tendem a se alinhar naturalmente segundo certas direções associadas à estrutura cristalina dos domínios, conhecidas como eixos de mais fácil magnetização. Assim, se a força magnetizante aplicada for reduzida, os momentos magnéticos dos domínios relaxam-se indo para as direções de mais fácil magnetização próximas da direção do campo aplicado. Como resultado, quando o campo aplicado é reduzido até zero, os momentos dos dipolos magnéticos, embora tendendo a relaxar e a assumir suas orientações iniciais, não são mais totalmente aleatórios em suas orientações. Eles agora retêm uma componente de magnetização líquida na direção do campo aplicado. Esse efeito é responsável pelo fenômeno conhecido como *histerese magnética*.

Devido a esse efeito de histerese, a relação entre B e H em um material ferromagnético é não linear e plurívoca. Em geral, as características do material não podem ser descritas de forma analítica. Muitas vezes, são apresentadas em forma de gráficos constituídos por conjuntos de curvas determinadas empiricamente, a partir de amostras de ensaios com os materiais, seguindo os métodos prescritos pela American Society for Testing and Materials (ASTM).⁷

A curva mais comum usada para descrever um material magnético é a *curva B-H* ou *laço de histerese*. O primeiro e segundo quadrantes (correspondendo a $B \geq 0$)

⁷ Dados numéricos de uma ampla variedade de materiais magnéticos estão disponibilizados pelos fabricantes de materiais magnéticos. Um problema com o uso de tais dados vem da diversidade dos sistemas de unidades usados. Por exemplo, a magnetização pode ser dada em oersteds ou em ampères-espiras por metro, e a densidade de fluxo magnético em gauss, quilogauss ou teslas. Alguns fatores úteis de conversão são dados no Apêndice E. O leitor deve lembrar-se de que as equações desse livro baseiam-se em unidades SI.

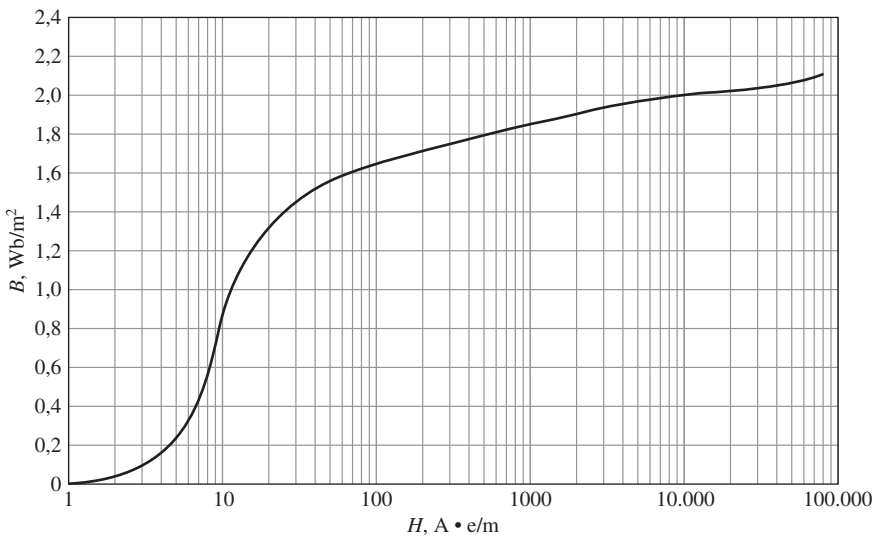


Figura 1.10 Curva de magnetização CC para o aço elétrico de grão orientado M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

de um conjunto de laços de histerese estão mostrados na Fig. 1.9 para o aço M-5, um típico aço elétrico de grão orientado, usado em equipamentos elétricos. Esses laços mostram a relação entre a densidade de fluxo magnético B e a força magnetizante H . Cada curva é obtida variando-se ciclicamente a força magnetizante aplicada entre valores iguais positivos e negativos de valor constante. A histerese faz essas curvas serem plurívocas. Depois de diversos ciclos, as curvas B - H formam laços fechados como se mostra na figura. As setas indicam as trajetórias seguidas por B quando H cresce e decresce. Observe que, com um valor crescente de H , as curvas começam a ficar horizontais à medida que o material tende à saturação. Para uma densidade de fluxo em torno de 1,7 T, pode-se ver que o material está muito saturado.

Observe também que quando H decresce desde seu valor máximo até zero, a densidade de fluxo diminui mas não até zero. Isso resulta do relaxamento das orientações dos momentos magnéticos dos domínios, como descrito acima. O resultado é que, quando H é zero, uma *magnetização remanescente* está presente.

Felizmente, para muitas aplicações em engenharia, é suficiente descrever o material por uma curva simples, obtida pela plotagem dos lugares de valores máximos de B e H nas extremidades dos laços de histerese. Essa curva é conhecida como *curva de magnetização CC* ou *normal*. Uma curva de magnetização CC para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 está mostrada na Fig. 1.10. A curva de magnetização CC despreza a natureza histerética do material mas exhibe claramente as suas características não lineares.

Exemplo 1.7

Suponha que o material do núcleo do Exemplo 1.1 seja aço elétrico de grão orientado do tipo M-5, o qual tem a curva de magnetização CC da Fig. 1.10. Encontre a corrente i necessária para produzir $B_c = 1$ T.

Solução

O valor de H_c para $B_c = 1$ T pode ser lido da Fig. 1.10 como

$$H_c = 11 \text{ A} \cdot \text{e/m}$$

A queda de FMM no caminho do núcleo é

$$\mathcal{F}_c = H_c l_c = 11(0,3) = 3,3 \text{ A} \cdot \text{e}$$

Desprezando o espraçamento, $B_g = B_c$ e a queda de FMM no entreferro é

$$\mathcal{F}_g = H_g g = \frac{B_g g}{\mu_0} = \frac{1(5 \times 10^{-4})}{4\pi \times 10^{-7}} = 396 \text{ A} \cdot \text{e}$$

A corrente necessária é

$$i = \frac{\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_g}{N} = \frac{399}{500} = 0,80 \text{ A}$$

Problema prático 1.6

Repita o Exemplo 1.7 encontrando a corrente i para que $B_c = 1,6$ T. De quanto a corrente deve ser aumentada para resultar esse aumento de 1,6 vezes na densidade de fluxo?

Solução

Pode-se mostrar que a corrente i deve ser 1,302 A. Assim, a corrente deve ser aumentada de $1,302/0,8 = 1,63$. Devido ao predomínio da relutância do entreferro, esse valor é ligeiramente maior do que o aumento fracionário na densidade de fluxo, apesar de que o núcleo começa a saturar de forma significativa quando a densidade de fluxo atinge 1,6 T.

1.4 Excitação CA

Em sistemas de potência CA, as formas de onda de tensão e de fluxo são bastante próximas de funções senoidais de tempo. Para tais condições, esta seção descreverá as características da excitação e das perdas associadas à operação CA, em regime permanente, dos materiais magnéticos. Como modelo, usaremos um circuito magnético de núcleo fechado, isto é, sem entreferro, tal como o mostrado na Fig. 1.1. O comprimento do caminho magnético é l_c e a área da seção reta é A_c , ao longo do comprimento do núcleo. Além disso, supomos uma variação senoidal para o fluxo $\varphi(t)$ do núcleo, assim

$$\varphi(t) = \phi_{\max} \text{ sen } \omega t = A_c B_{\max} \text{ sen } \omega t \quad (1.47)$$

em que

ϕ_{\max} = amplitude do fluxo no núcleo φ em webers

B_{\max} = amplitude da densidade de fluxo B_c em teslas

ω = frequência angular = $2\pi f$

f = frequência em Hz

Da Eq. 1.26, a tensão induzida no enrolamento de N espiras é

$$e(t) = \omega N \phi_{\max} \cos(\omega t) = E_{\max} \cos \omega t \quad (1.48)$$

em que

$$E_{\max} = \omega N \phi_{\max} = 2\pi f N A_c B_{\max} \quad (1.49)$$

Na operação CA em regime permanente, muitas vezes estamos mais interessados nos *valores eficazes* (ef)* das tensões e correntes do que nos valores instantâneos ou máximos. Em geral, o valor eficaz de uma função periódica de tempo $f(t)$ de período T é definido como

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt\right)} \quad (1.50)$$

A partir da Eq. 1.50, pode-se mostrar que o valor eficaz de uma onda senoidal é $1/\sqrt{2}$ vezes o seu valor de pico. Assim, o valor eficaz da tensão induzida é

$$E_{\text{ef}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N A_c B_{\max} = \sqrt{2} \pi f N A_c B_{\max} \quad (1.51)$$

Uma *corrente de excitação*, i_φ , correspondente a uma FMM de excitação $Ni_\varphi(t)$ é necessária para produzir o fluxo $\varphi(t)$ no núcleo.⁸ Devido às propriedades magnéticas não lineares do núcleo, a corrente de excitação correspondente a um fluxo senoidal no núcleo será não senoidal. A curva da corrente de excitação em função do tempo pode ser obtida graficamente das características magnéticas do material do núcleo, como ilustra a Fig. 1.11a. Como B_c e H_c se relacionam com φ e i_φ por constantes geométricas conhecidas, o laço de histerese CA da Fig. 1.11b foi desenhado em termos de $\varphi = B_c A_c$ e $i_\varphi = H_c l_c / N$. As ondas senoidais da tensão induzida, e , e do fluxo, φ , de acordo com as Eqs. 1.47 e 1.48, estão mostradas na Fig. 1.11a.

Em qualquer instante determinado, o valor de i_φ correspondente a um valor dado de fluxo pode ser obtido diretamente do laço de histerese. Por exemplo, no tempo t' , o fluxo é φ' e a corrente é i_φ' ; no tempo t'' , os valores correspondentes são φ'' e i_φ'' . Observe que, como o laço de histerese é multivalorado, deve-se ter cuidado buscando os valores de fluxo crescente (φ' na figura) na parte de fluxo crescente do laço de histerese. Do mesmo modo, a parte do fluxo decrescente do laço de histerese deve ser escolhida quando se buscam os valores de fluxo decrescente (φ'' na figura).

Como o laço de histerese “achata-se” devido aos efeitos da saturação, observe que a forma de onda da corrente de excitação apresenta picos acentuados. Seu valor eficaz $I_{\varphi,\text{ef}}$ é definido pela Eq. 1.50, em que T é o período de um ciclo. Está relacionado com o valor eficaz (ef) correspondente H_{ef} de H_c pela equação

$$I_{\varphi,\text{ef}} = \frac{l_c H_{\text{ef}}}{N} \quad (1.52)$$

As características de excitação CA dos materiais usados em núcleos são descritas frequentemente em termos de volts-ampères eficazes, em vez de uma curva de

* N. de T.: Na literatura nacional aparece também rms (root mean square) no lugar de ef.

⁸ De forma mais genérica, em um sistema com múltiplos enrolamentos, a FMM de excitação é o total líquido de ampères-espiras que atua para produzir fluxo no circuito magnético.

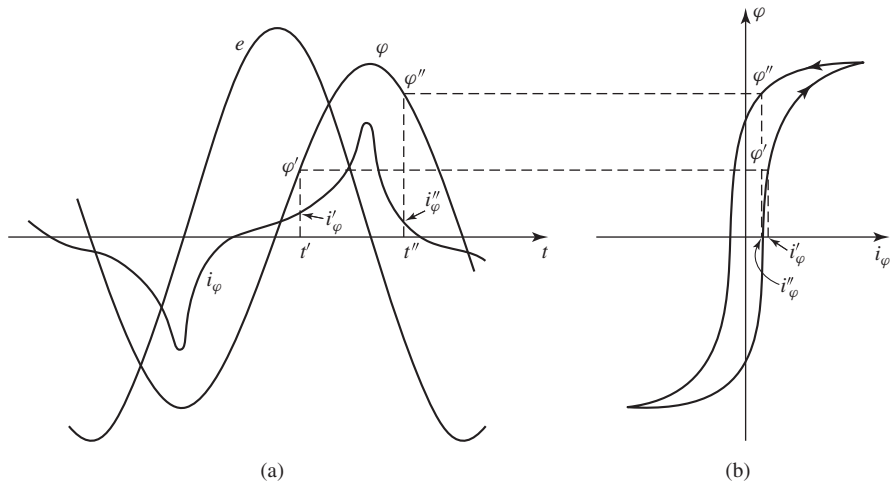


Figura 1.11 Fenômenos de excitação. (a) Tensão, fluxo e corrente de excitação; (b) Laço de histerese correspondente.

magnetização que relacione B com H . A teoria que fundamenta essa representação pode ser explicada combinando as Eqs. 1.51 e 1.52. Assim, das Eqs. 1.51 e 1.52, os volts-ampères eficazes necessários para excitar o núcleo da Fig. 1.1, com uma densidade de fluxo especificada, é igual a

$$\begin{aligned} E_{ef} I_{\varphi,ef} &= \sqrt{2} \pi f N A_c B_{\max} \frac{l_c H_{ef}}{N} \\ &= \sqrt{2} \pi f B_{\max} H_{ef} (A_c l_c) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Na Eq. 1.53, pode-se ver que o produto $A_c l_c$ é igual ao volume do núcleo e, assim, o valor necessário de excitação, em volts-ampères eficazes, para excitar o núcleo com uma onda senoidal é proporcional à frequência de excitação, ao volume do núcleo e ao produto da densidade do fluxo de pico vezes a intensidade eficaz do campo magnético. Para um material magnético com densidade de massa ρ_c , a massa do núcleo é $A_c l_c \rho_c$ e o valor dos *volts-ampères eficazes de excitação por unidade de massa*, S_a , pode ser expresso como

$$S_a = \frac{E_{ef} I_{\varphi,ef}}{\text{massa}} = \sqrt{2} \pi f \left(\frac{B_{\max} H_{ef}}{\rho_c} \right) \quad (1.54)$$

Observe que, com essa forma de normalização, o valor dos volts-ampères eficazes depende apenas da frequência e de B_{\max} porque H_{ef} é uma função unívoca de B_{\max} , determinada pela forma do laço de histerese do material em uma frequência dada f qualquer. Como resultado, as condições de excitação CA de um material magnético são fornecidas em geral pelos fabricantes em termos de volts-ampères eficazes por unidade de massa. Esses valores são determinados por meio de ensaios de laboratório realizados com amostras de núcleo fechado do material. Esses resultados estão ilustrados na Fig. 1.12 para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5.

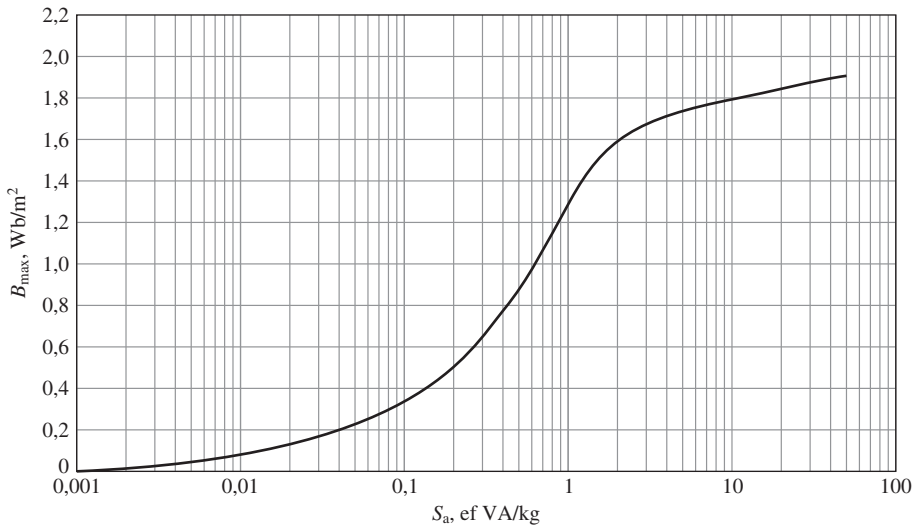


Figura 1.12 Volts-ampères eficazes de excitação por quilograma a 60 Hz para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

A corrente de excitação fornece a FMM necessária para produzir o fluxo no núcleo e o ingresso da potência associada com a energia do campo magnético do núcleo. Parte dessa energia é dissipada como perdas das quais resulta o aquecimento do núcleo. O restante aparece como potência reativa associada ao armazenamento de energia no campo magnético. Essa potência reativa não é dissipada no núcleo. Ciclicamente, ela é fornecida e absorvida pela fonte de excitação.

Dois mecanismos de perdas estão associados às variações de fluxo nos materiais magnéticos. O primeiro é devido à natureza histerética do material magnético. Como já foi discutido, em um circuito magnético como o da Fig. 1.1, uma excitação variável no tempo submeterá o material magnético a uma variação cíclica descrita por um laço de histerese como o mostrado na Fig. 1.13.

A Eq. 1.44 pode ser usada para calcular o ingresso de energia W no núcleo magnético da Fig. 1.1, quando o material é submetido a um único ciclo. Obtém-se

$$W = \oint i_\varphi d\lambda = \oint \left(\frac{H_c l_c}{N} \right) (A_c N dB_c) = A_c l_c \oint H_c dB_c \quad (1.55)$$

Constatando que $A_c l_c$ é o volume do núcleo e que a integral é a área do laço de histerese CA , vemos que há um fornecimento líquido de energia para dentro do material a cada vez que ele é submetido a um ciclo. Essa energia é requerida para girar os dipolos do material e é dissipada como calor. Assim, para um determinado ciclo, as respectivas *perdas por histerese* são proporcionais à área do ciclo de histerese e ao volume total de material. Como há uma perda de energia a cada ciclo, a potência das perdas por histerese é proporcional à frequência da excitação aplicada.

O segundo mecanismo de perdas é o aquecimento ôhmico devido às correntes induzidas no material do núcleo. Pela lei de Faraday (Eq. 1.25), vemos que os campos magnéticos variáveis no tempo dão origem a campos elétricos. Em materiais

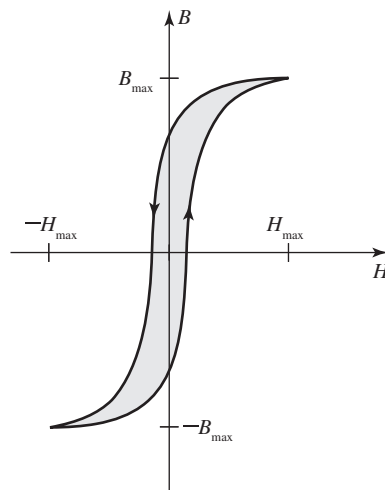


Figura 1.13 Laço de histerese; a perda por histerese é proporcional à área do laço (sombreado).

magnéticos, esses campos elétricos resultam em correntes induzidas, normalmente denominadas *correntes parasitas*, que circulam no material do núcleo e opõem-se às mudanças de densidade de fluxo do material. Para contrabalançar o respectivo efeito de desmagnetização, a corrente no enrolamento de excitação deve aumentar. Assim, o laço B - H “dinâmico”, resultante da operação em CA, é um pouco mais “cheio” do que o laço de histerese, para condições que variem lentamente. Esse efeito se intensifica à medida que a frequência de excitação aumenta. Por essa razão, as características dos aços elétricos variam com a frequência. Em geral, elas são fornecidas pelos fabricantes para a faixa de frequência esperada de operação para cada aço elétrico em especial. Observe, por exemplo, que o valor eficaz dos volts-ampères de excitação da Fig. 1.12 está especificado para a frequência de 60 Hz.

Para reduzir os efeitos das correntes parasitas, as estruturas magnéticas são construídas usualmente com chapas delgadas ou *lâminas* de material magnético. Essas chapas, alinhadas na direção das linhas de campo, estão isoladas entre si por uma camada de óxido em suas superfícies, ou por uma fina cobertura de esmalte ou verniz de isolamento. Isso reduz muito a magnitude das correntes parasitas porque as camadas de isolamento interrompem os caminhos de corrente. Quanto mais delgadas as chapas, menores as perdas. Em geral, como primeira aproximação, as perdas por correntes parasitas tendem a aumentar com o quadrado da frequência de excitação e também com o quadrado da densidade de fluxo de pico.

Muitas vezes, essas perdas dependem do aspecto metalúrgico do material, assim como da densidade de fluxo e da frequência. Os dados sobre perdas no núcleo* são apresentados normalmente em forma de gráficos. São plotados em termos de watts por unidade de massa em função da densidade de fluxo. Com frequência, é fornecida uma família de curvas para diferentes frequências. A Fig. 1.14 mostra as perdas P_c no núcleo para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 a 60 Hz.

* N. de T.: Conhecidas também como “perdas no ferro”.

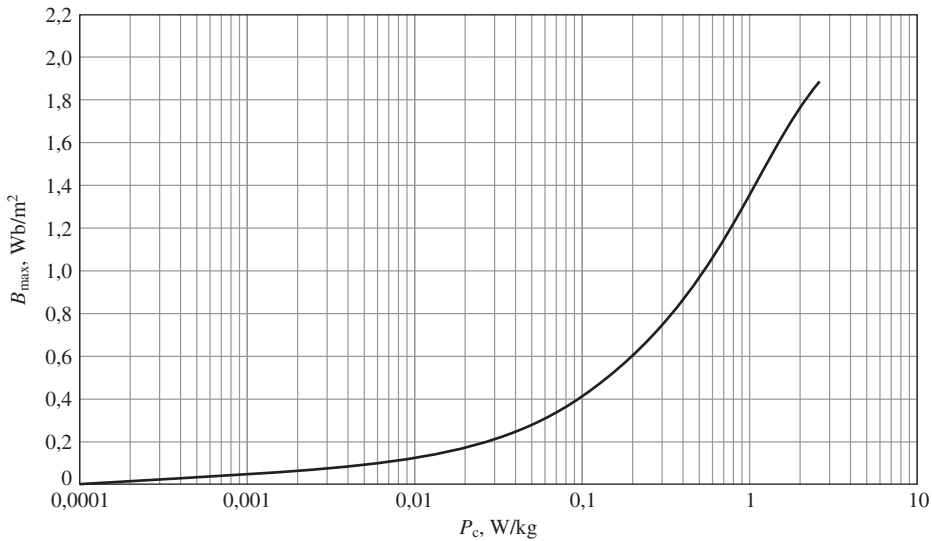


Figura 1.14 Densidade de perdas no núcleo a 60 Hz em watts por quilograma para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

Quase todos os transformadores e certas partes de máquinas elétricas usam material à base de chapas de aço. Essas apresentam direções altamente favoráveis de magnetização, ao longo das quais as perdas no núcleo são baixas e a permeabilidade é alta. Esse material é denominado *aço de grão orientado*. A razão dessa propriedade está na estrutura atômica cúbica de corpo centrado dos cristais da liga de silício e ferro. Cada cubo tem um átomo em cada vértice, assim como um outro no seu centro. No cubo, a aresta é o eixo de mais fácil magnetização, a diagonal da face é o eixo mais difícil e a diagonal do cubo é o mais difícil de todos. Usando técnicas adequadas de fabricação, a maioria das arestas dos cubos dos cristais é alinhada na direção de laminação. Desse modo, essa torna-se a direção favorável de magnetização. Em relação às perdas no núcleo e à permeabilidade, o comportamento nessa direção é superior ao dos *aços não orientados*, nos quais os cristais estão orientados aleatoriamente, produzindo um material de características uniformes em todas as direções. Como resultado, os aços orientados podem operar, em relação aos não orientados, com densidades de fluxo mais elevadas.

Os aços elétricos não orientados são usados em aplicações em que o fluxo não segue um caminho que pode ser orientado na direção de laminação, ou em que o baixo custo é importante. Nesses aços, as perdas são maiores e a permeabilidade é muito menor do que nos aços de grão orientado.

Exemplo 1.8

O núcleo magnético da Fig. 1.15 é feito de chapas de aço elétrico de grão orientado M-5. O enrolamento é excitado com uma tensão de 60 Hz produzindo no aço uma densidade de fluxo de $B = 1,5 \text{ sen } \omega t \text{ T}$, em que $\omega = 2\pi 60 \approx 377 \text{ rad/s}$. O aço ocupa 0,94 da área da seção reta. A densidade de massa do aço é $7,65 \text{ g/cm}^3$. Encontre (a) a tensão aplicada, (b) a corrente de pico, (c) a corrente eficaz de excitação e (d) as perdas no núcleo.

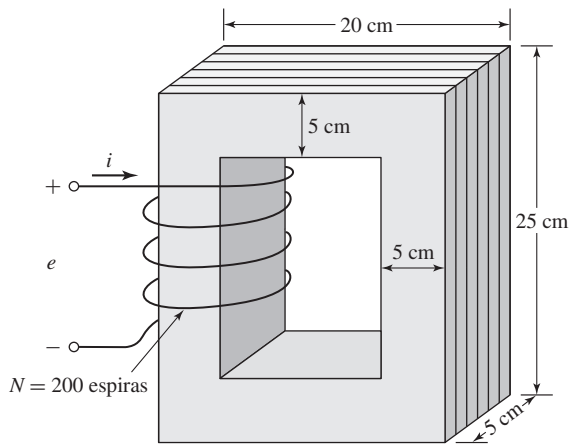


Figura 1.15 Núcleo aço laminado com enrolamento para o Exemplo 1.8.

Solução

- a. Da Eq. 1.26, a tensão é

$$\begin{aligned} e &= N \frac{d\phi}{dt} = N A_c \frac{dB}{dt} \\ &= 200 \times 25 \text{ cm}^2 \times 0,94 \times 1,5 \times 377 \cos(377t) \\ &= 266 \cos(377t) \text{ V} \end{aligned}$$

- b. A intensidade de campo magnético correspondente a $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$ está dada na Fig. 1.10 valendo $H_{\max} = 36 \text{ A} \cdot \text{e/m}$. Observe que, como esperado, a permeabilidade relativa $\mu_r = B_{\max} / (\mu_0 H_{\max}) = 33.000$ para um fluxo de $1,5 \text{ T}$ é inferior ao valor de $\mu_r = 72.300$, encontrado no Exemplo 1.4 e correspondente ao valor de $1,0 \text{ T}$, mesmo assim significativamente maior do que o valor de 2900 correspondente a um fluxo de $1,8 \text{ T}$.

$$l_c = (15 + 15 + 20 + 20) \text{ cm} = 0,70 \text{ m}$$

A corrente de pico é

$$I = \frac{H_{\max} l_c}{N} = \frac{36 \times 0,70}{200} = 0,13 \text{ A}$$

- c. A corrente eficaz é obtida do valor de S_a da Fig. 1.12 para $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$.

$$S_a = 1,5 \text{ VA/kg}$$

O volume do núcleo e a massa são

$$\text{Vol}_c = 25 \text{ cm}^2 \times 0,94 \times 70 \text{ cm} = 1645 \text{ cm}^3$$

$$M_c = 1645 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{7,65 \text{ g}}{1,0 \text{ cm}^3} \right) = 12,6 \text{ kg}$$

Os volts-ampères e a corrente totais são

$$S = 1,5 \text{ VA/kg} \times 12,6 \text{ kg} = 18,9 \text{ VA}$$

$$I_{\varphi,ef} = \frac{S}{E_{ef}} = \frac{18,9}{266/\sqrt{2}} = 0,10 \text{ A}$$

- d. A densidade de perdas no núcleo é obtida da Fig. 1.14 como $P_c = 1,2 \text{ W/kg}$. As perdas totais no núcleo são

$$P_{\text{núcleo}} = 1,2 \text{ W/kg} \times 12,6 \text{ kg} = 15,1 \text{ W}$$

Problema prático 1.7

Repita o Exemplo 1.8 para um tensão de 60 Hz dada por $B = 1,0 \text{ sen } \omega t \text{ T}$.

Solução

- $V = 177 \cos 377t \text{ V}$
- $I = 0,042 \text{ A}$
- $I_{\varphi} = 0,041 \text{ A}$
- $P = 6,5 \text{ W}$

1.5 Ímãs permanentes

A Fig. 1.16a mostra o segundo quadrante de um laço de histerese para o Alnico 5, um material magnético permanente (ímã) comum, ao passo que a Fig. 1.16b mostra o segundo quadrante de um laço de histerese para o aço do tipo M-5.⁹ Observe que as curvas têm naturezas semelhantes. No entanto, o laço de histerese do Alnico 5 é caracterizado por um alto valor de *magnetização remanescente* ou *residual* B_r (aproximadamente 1,22 T), assim como um valor elevado de coercividade, H_c (aproximadamente -49 kA/m).

A magnetização remanescente B_r corresponde à densidade de fluxo que permaneceria atuando em uma seção do material se a FMM aplicada (e portanto a intensidade de campo magnético H) fosse reduzida a zero. No entanto, embora o aço elétrico de grão orientado M-5 tenha também um valor elevado de magnetização remanescente (aproximadamente 1,4 T), ele tem um valor muito menor de coercividade (aproximadamente -6 A/m , menor por um fator superior a 7500). A coercividade H_c corresponde à intensidade de campo magnético (proporcional à FMM) requerida para reduzir a densidade de fluxo do material a zero. Como veremos, quanto menor for a coercividade de um determinado material magnético, mais fácil é desmagnetizá-lo.

O significado da magnetização remanescente é que ela pode produzir fluxo magnético em um circuito magnético na ausência de uma excitação externa, como correntes nos enrolamentos. Esse é um fenômeno conhecido de qualquer um que já afixou bilhetes em um refrigerador usando ímãs. Esses são muito usados em dispositivos como alto-falantes e motores de ímãs permanentes.

⁹ Para obter o valor mais elevado de magnetização remanescente, os laços de histerese da Fig. 1.16 são os que seriam obtidos se os materiais tivessem sido excitados por uma FMM suficiente para assegurar que sejam colocados fortemente em saturação. Isso é discutido com mais detalhes na Seção 1.6.

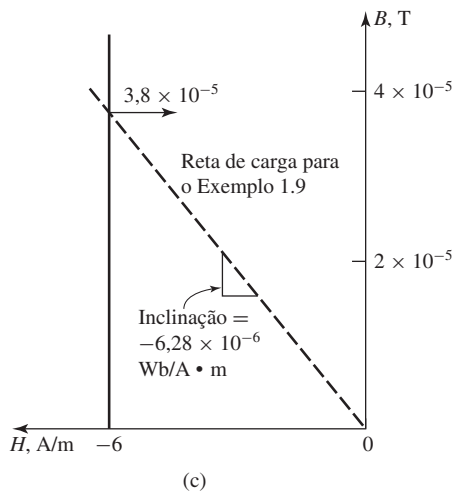
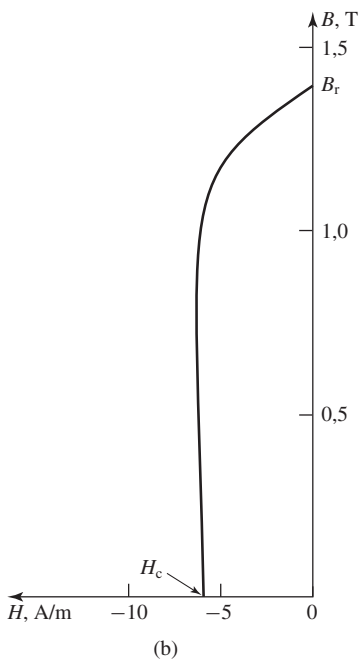
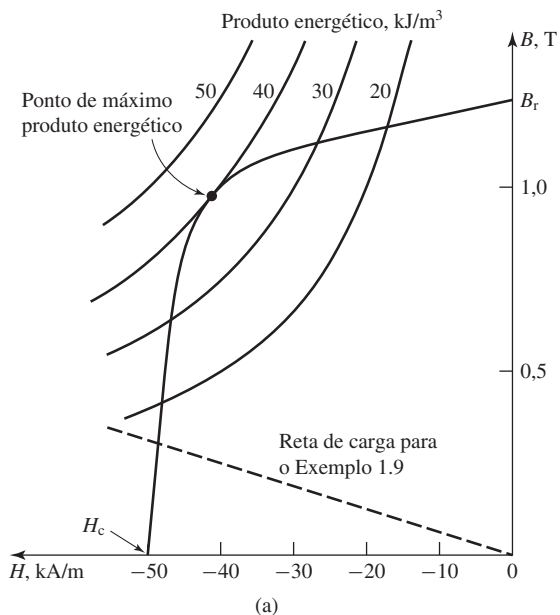


Figura 1.16 (a) Segundo quadrante de um laço de histerese para o Alnico 5; (b) segundo quadrante de um laço de histerese do aço elétrico de grão orientado M-5; (c) laço de histerese ampliado do M-5 para valores pequenos de B . (Armco Inc.)