

# Capítulo 1

## Operações Fundamentais com Números

### 1.1 QUATRO OPERAÇÕES

Assim como na aritmética, quatro operações são fundamentais em álgebra: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Quando dois números  $a$  e  $b$  são adicionados, sua soma é indicada por  $a + b$ . Assim,  $3 + 2 = 5$ .

Quando um número  $b$  é subtraído de um número  $a$ , sua diferença é indicada por  $a - b$ . Assim,  $6 - 2 = 4$ .

A subtração pode ser definida em termos da adição. Ou seja, podemos definir  $a - b$  como o número  $x$  tal que somado a  $b$  gera  $a$  ou  $x + b = a$ . Por exemplo,  $8 - 3$  é aquele número  $x$  que adicionado a 3 produz 8, i.e.,  $x + 3 = 8$ ; Desta maneira,  $8 - 3 = 5$ .

O produto de dois números  $a$  e  $b$  é um número  $c$  tal que  $a \times b = c$ . A operação de multiplicação pode ser indicada por uma cruz, um ponto ou parênteses. Assim,  $5 \times 3 = 5 \cdot 3 = 5(3) = (5)(3) = 15$ , onde os fatores são 5 e 3 e seu produto 15. Quando letras são usadas, como na álgebra, geralmente evitamos a notação  $p \times q$ , já que  $\times$  pode ser confundido com um número representado por uma letra.

Quando um número  $a$  é dividido por um número  $b$ , o quociente obtido se escreve

$$a \div b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a/b,$$

onde  $a$  é chamado o dividendo e  $b$  o divisor. Também diz-se que a expressão  $a/b$  é uma fração, tendo numerador  $a$  e denominador  $b$ .

A divisão por zero não está definida. Ver Problemas 1.1(b) e (e).

A divisão pode ser definida em termos da multiplicação. Isto é, podemos considerar  $a/b$  como o número  $x$  que resulta  $a$  quando multiplicado por  $b$ , ou  $bx = a$ . Por exemplo,  $6/3$  é o número  $x$  tal que 3 multiplicado por  $x$  resulta 6, ou  $3x = 6$ ; assim  $6/3 = 2$ .

### 1.2 O SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS

O sistema dos números reais, como conhecemos atualmente, é o resultado de um processo gradual, indicado a seguir.

- (1) *Números naturais* 1, 2, 3, 4,... (três pontos significam “e assim por diante”) usados em contagens são também conhecidos como os inteiros positivos. Se dois desses números forem adicionados ou multiplicados, o resultado será sempre um número natural.

- (2) *Números racionais positivos* ou frações positivas são quocientes de dois inteiros positivos, como  $2/3$ ,  $8/5$ ,  $121/17$ . Os números racionais positivos incluem o conjunto dos números naturais. Desta maneira, o número  $3/1$  é o número natural 3.
- (3) *Números irracionais positivos* são os números que não são racionais, como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ .
- (4) *Zero*, que se escreve 0, surgiu com a finalidade de estender o sistema numérico de forma a permitir operações como  $6 - 6$  ou  $10 - 10$ . O zero tem a propriedade de multiplicado por qualquer número resultar em zero. Zero dividido por qualquer número  $\neq 0$  (i.e., diferente de zero) é zero.
- (5) *Números negativos* inteiros, racionais e irracionais como  $-3$ ,  $-2/3$  e  $-\sqrt{2}$ , apareceram no intuito de estender o sistema numérico para permitir operações como  $2 - 8$ ,  $\pi - 3\pi$  ou  $2 - 2\sqrt{2}$ .

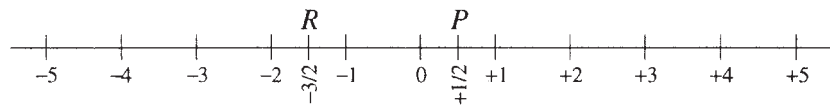
Quando não há sinal antes de um número, subentende-se o sinal positivo. Portanto  $5$  é  $+5$ ,  $\sqrt{2}$  é  $+\sqrt{2}$ . Considera-se zero um número racional sem sinal.

Os números reais são compostos da coleção de números racionais e irracionais, tanto positivos quanto negativos, e o zero.

*Nota:* a palavra “real” é usada em contraste a outros números envolvendo  $\sqrt{-1}$ , que são abordados adiante e são conhecidos como *imaginários*, embora sejam muito úteis em matemática e na ciência. Salvo contrariamente especificado, estaremos tratando de números reais.

### 1.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE NÚMEROS REAIS

É geralmente útil representar números reais por pontos em uma reta. Para fazer isso, escolhemos um ponto na reta para representar o número zero e chamamos esse ponto de origem. Os inteiros positivos  $+1$ ,  $+2$ ,  $+3$ ,... são associados aos pontos na reta distando 1, 2, 3,... unidades à *direita* da origem, respectivamente (ver Fig. 1-1), ao passo que os números negativos  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,... são associados aos pontos na reta distando 1, 2, 3,... unidades à *esquerda* da origem, respectivamente.



**Figura 1-1**

O número racional  $1/2$  está representado nessa escala por um ponto  $P$  na metade do trecho entre 0 e  $+1$ . O número negativo  $-3/2$  ou  $-1\frac{1}{2}$  está representado por um ponto  $R$   $1\frac{1}{2}$  unidades à esquerda da origem.

Pode-se demonstrar que a cada número real corresponde um e somente um ponto na reta; reciprocamente, a cada ponto na reta corresponde um e apenas um número real.

A posição de números reais na reta estabelece uma ordem ao sistema de números reais. Se um ponto  $A$  se encontra à direita de outro ponto  $B$  na reta, dizemos que o número correspondente a  $A$  é *maior* que o número correspondente a  $B$ , ou que o número correspondente a  $B$  é *menor* que o número correspondente a  $A$ . Os símbolos para “maior que” e “menor que” são  $>$  e  $<$ , respectivamente. Estes símbolos são chamados de “sinais de desigualdade”.

Logo, como 5 está à direita de 3, 5 é maior que 3 ou  $5 > 3$ ; podemos também dizer que 3 é menor que 5 e escrever  $3 < 5$ . Analogamente, já que  $-6$  se encontra à esquerda de  $-4$ ,  $-6$  é menor que  $-4$ , i.e.,  $-6 < -4$ ; também podemos escrever  $-4 > -6$ .

Por valor absoluto ou valor numérico de um número, entende-se a distância do número à origem na reta numérica. O valor absoluto é indicado por duas linhas verticais em torno do número. Assim  $|-6| = 6$ ,  $|+4| = 4$ ,  $|-3/4| = 3/4$ .

## 1.4 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

- (1) *Propriedade comutativa da adição* A ordem da adição de dois números não afeta o resultado.

Portanto 
$$a + b = b + a, \quad 5 + 3 = 3 + 5 = 8.$$

- (2) *Propriedade associativa da adição* Os termos de uma soma podem ser agrupados de qualquer maneira sem afetar o resultado.

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c, \quad 3 + 4 + 1 = 3 + (4 + 1) = (3 + 4) + 1 = 8$$

- (3) *Propriedade comutativa da multiplicação* A ordem dos fatores de um produto não afeta o resultado.

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$$

- (4) *Propriedade associativa da multiplicação* Os fatores de um produto podem ser agrupados de qualquer modo sem afetar o resultado.

$$abc = a(bc) = (ab)c, \quad 3 \cdot 4 \cdot 6 = 3(4 \cdot 6) = (3 \cdot 4)6 = 72$$

- (5) *Propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição* O produto de um número  $a$  pela soma de dois números  $(b + c)$  é igual à soma dos produtos  $ab$  e  $ac$ .

$$a(b + c) = ab + ac, \quad 4(3 + 2) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 20$$

Extensões destas regras podem ser feitas. Assim podemos adicionar os números  $a, b, c, d, e$  agrupando-os em qualquer ordem, como  $(a + b) + c + (d + e)$ ,  $a + (b + c) + (d + e)$  etc. De maneira similar, na multiplicação podemos escrever  $(ab)c(de)$  ou  $a(bc)(de)$  e o resultado será independente de ordem ou combinação.

## 1.5 REGRAS DE SINAIS

- (1) Para adicionar dois números com sinais iguais, realize a soma de seus valores absolutos antecedida pelo sinal em comum. Assim  $3 + 4 = 7$ ,  $(-3) + (-4) = -7$ .

- (2) Para adicionar dois números com sinais distintos, encontre a diferença entre seus valores absolutos antecedida pelo sinal do número com maior valor absoluto.

**Exemplos 1.1**  $17 + (-8) = 9, \quad (-6) + 4 = -2, \quad (-18) + 15 = -3$

- (3) Para subtrair um número  $b$  de outro número  $a$ , mude a operação para adição e substitua  $b$  pelo seu oposto,  $-b$ .

**Exemplos 1.2**  $12 - (7) = 12 + (-7) = 5, \quad (-9) - (4) = -9 + (-4) = -13, \quad 2 - (-8) = 2 + 8 = 10$

- (4) Para multiplicar (ou dividir) dois números com sinais iguais, multiplique (ou divida) seus valores absolutos e coloque um sinal de mais (ou nenhum sinal).

**Exemplos 1.3**  $(5)(3) = 15, \quad (-5)(-3) = 15, \quad \frac{-6}{-3} = 2$

- (5) Para multiplicar (ou dividir) dois números com sinais distintos, multiplique (ou divida) seus valores absolutos e acrescente um sinal de menos.

**Exemplos 1.4**  $(-3)(6) = -18, \quad (3)(-6) = -18, \quad \frac{-12}{4} = -3$

## 1.6 EXPOENTES E POTÊNCIAS

Quando um número  $a$  é multiplicado por si mesmo  $n$  vezes, o produto  $a \cdot a \cdot a \cdots a$  ( $n$  vezes) é indicado pelo símbolo  $a^n$  ao qual nos referimos por “a  $n$ -ésima potência de  $a$ ” ou “ $a$  na  $n$ -ésima potência”.

$$\text{Exemplos 1.5} \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32, \quad (-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125 \\ 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2x^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = a^3b^2, \quad (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^3$$

Na expressão  $a^n$ , o número  $a$  é chamado a *base* e o inteiro positivo  $n$  é o *expoente*. Se  $p$  e  $q$  são inteiros positivos, então seguem as seguintes regras para expoentes.

$$\begin{array}{ll} (1) a^p \cdot a^q = a^{p+q} & \text{Assim: } 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \\ (2) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}} \quad \text{se } a \neq 0 & \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3, \quad \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^{6-4}} = \frac{1}{3^2} \\ (3) (a^p)^q = a^{pq} & (4^2)^3 = 4^6, \quad (3^4)^2 = 3^8 \\ (4) (ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad \text{se } a \neq 0 & (4 \cdot 5)^2 = 4^2 \cdot 5^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} \end{array}$$

## 1.7 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Operações com frações podem ser realizadas de acordo com as seguintes regras.

- (1) O valor de uma fração permanecerá o mesmo caso seu numerador e denominador sejam multiplicados ou divididos pelo mesmo número, desde que o número não seja zero.

$$\text{Exemplos 1.6} \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}, \quad \frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6}$$

- (2) Mudar o sinal do numerador ou do denominador de uma fração muda o sinal da fração.

$$\text{Exemplo 1.7} \quad \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} = \frac{3}{-5}$$

- (3) Somar duas frações com o denominador em comum resulta numa fração cujo numerador é a soma dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o denominador comum.

$$\text{Exemplo 1.8} \quad \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

- (4) A soma ou diferença de duas frações com diferentes denominadores pode ser encontrada ao se escrever as frações com o mesmo denominador.

$$\text{Exemplo 1.9} \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

- (5) O produto de duas frações é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e o denominador é o produto dos denominadores.

$$\text{Exemplos 1.10} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}, \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

- (6) A inversa de uma fração é uma fração cujo numerador é o denominador da fração dada e cujo denominador é o numerador da fração dada. Portanto, a inversa de 3 (i.e.,  $3/1$ ) é  $1/3$ . De maneira análoga, as inversas de  $5/8$  e  $-4/3$  são  $8/5$  e  $3/-4$  ou  $-3/4$ , respectivamente.

- (7) Para dividir duas frações, multiplique a primeira pela inversa da segunda.

$$\text{Exemplos 1.11} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Este resultado pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a/b \cdot bd}{c/d \cdot bd} = \frac{ad}{bc}.$$

**Problemas Resolvidos**

- 1.1** Escreva a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  de cada um dos seguintes pares de números: (a) 48, 12; (b) 8, 0; (c) 0, 12; (d) 10, 20; (e) 0, 0.

**Solução**

$$(a) S = 48 + 12 = 60, D = 48 - 12 = 36, P = 48(12) = 576, Q = 48 \div 12 = \frac{48}{12} = 4$$

$$(b) S = 8 + 0 = 8, D = 8 - 0 = 8, P = 8(0) = 0, Q = 8 \div 0 \text{ ou } 8/0$$

Mas, por definição,  $8/0$  é o número  $x$  (caso exista), tal que  $x(0) = 8$ . Evidentemente não existe tal número, uma vez que qualquer número multiplicado por 0 resulta 0.\*

$$(c) S = 0 + 12 = 12, D = 0 - 12 = -12, P = 0(12) = 0, Q = \frac{0}{12} = 0$$

$$(d) S = 10 + 20 = 30, D = 10 - 20 = -10, P = 10(20) = 200, Q = 10 \div 20 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$(e) S = 0 + 0 = 0, D = 0 - 0 = 0, P = 0(0) = 0, Q = 0 \div 0 \text{ ou } 0/0 \text{ é por definição o número } x \text{ (caso exista) tal que } x(0) = 0. \text{ Como isto é verdadeiro para qualquer número } x, \text{ não existe um número representado por } 0/0.$$

A partir de (b) e (e) conclui-se que a divisão por zero é uma operação não definida.

- 1.2** Realize cada uma das operações indicadas.

$$(a) 42 + 23, 23 + 42$$

$$(f) 35 \cdot 28$$

$$(i) 72 \div 24 + 64 \div 16$$

$$(b) 27 + (48 + 12), (27 + 48) + 12$$

$$(g) 756 \div 21$$

$$(j) 4 \div 2 + 6 \div 3 - 2 \div 2 + 3 \cdot 4$$

$$(c) 125 - (38 + 27)$$

$$(h) \frac{(40 + 21)(72 - 38)}{(32 - 15)}$$

$$(k) 128 \div (2 \cdot 4), (128 \div 2) \cdot 4$$

$$(d) 6 \cdot 8, 8 \cdot 6$$

$$(e) 4(7 \cdot 6), (4 \cdot 7)6$$

**Solução**

$$(a) 42 + 23 = 65, 23 + 42 = 65. \text{ Logo, } 42 + 23 = 23 + 42.$$

Isto ilustra a comutatividade da adição.

$$(b) 27 + (48 + 12) = 27 + 60 = 87, (27 + 48) + 12 = 75 + 12 = 87. \text{ Assim, } 27 + (48 + 12) = (27 + 48) + 12.$$

Isto ilustra a associatividade da adição.

$$(c) 125 - (38 + 27) = 125 - 65 = 60$$

$$(d) 6 \cdot 8 = 48, 8 \cdot 6 = 48. \text{ Então, } 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6, \text{ o que ilustra a comutatividade da multiplicação.}$$

$$(e) 4(7 \cdot 6) = 4(42) = 168, (4 \cdot 7)6 = (28)6 = 168. \text{ Desta maneira, } 4(7 \cdot 6) = (4 \cdot 7)6.$$

Isto ilustra a associatividade da multiplicação.

$$(f) (35)(28) = 35(20 + 8) = 35(20) + 35(8) = 700 + 280 = 980 \text{ devido à distributividade da multiplicação.}$$

$$(g) \frac{756}{21} = 36 \quad \text{Checar: } 21 \cdot 36 = 756$$

$$(h) \frac{(40 + 21)(72 - 38)}{(32 - 15)} = \frac{(61)(34)}{17} = \frac{61 \cdot \cancel{34}^2}{\cancel{17}^1} = 61 \cdot 2 = 122$$

$$(i) \text{ Por convenção, contas em aritmética cumprem a seguinte regra: operações de multiplicação e divisão precedem operações de adição e subtração.}$$

Assim,  $72 \div 24 + 64 \div 16 = 3 + 4 = 7$ .

$$(j) \text{ A regra do item (i) é aplicada aqui, portanto } 4 \div 2 + 6 \div 3 - 2 \div 2 + 3 \cdot 4 = 2 + 2 - 1 + 12 = 15.$$

$$(k) 128 \div (2 \cdot 4) = 128 \div 8 = 16, (128 \div 2) \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256$$

Consequentemente, se escrevermos  $128 \div 2 \cdot 4$  sem parênteses, as operações de multiplicação e divisão devem ser feitas na ordem em que aparecem da esquerda para a direita, logo  $128 \div 2 \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256$ .

\* N. de R. T.: Sob a ótica da Teoria das Definições, é possível definir divisão por zero. Apenas não é usual.

**1.3** Classifique cada um dos números a seguir de acordo com as categorias: número real, inteiro positivo, inteiro negativo, número racional, número irracional, nenhuma das anteriores.

$$-5, 3/5, 3\pi, 2, -1/4, 6.3, 0, \sqrt{5}, \sqrt{-1}, 0,3782, \sqrt{4}, -18/7$$

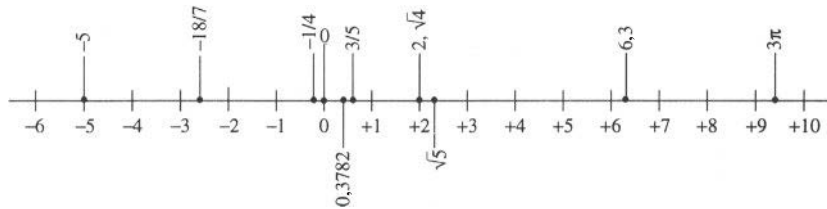
### Solução

Se o número pertence a uma categoria ou mais, indicamos por um sinal de visto.

	Número real	Inteiro positivo	Inteiro negativo	Número racional	Número irracional	Nenhuma das anteriores
-5	✓		✓	✓		
3/5	✓			✓		
3π	✓				✓	
2	✓	✓		✓		
-1/4	✓			✓		
6,3	✓			✓		
0	✓			✓		
√5	✓				✓	
√-1						✓
0,3782	✓			✓		
√4	✓	✓		✓		
-18/7	✓			✓		

**1.4** Represente (aproximadamente) através de pontos numa escala gráfica cada um dos números reais no Problema 1.3.

Nota:  $3\pi$  é aproximadamente  $3(3,14) = 9,42$ , então o ponto correspondente está entre +9 e +10, como indicado.  $\sqrt{5}$  está entre 2 e 3, tendo valor 2,236 até três casas decimais.



**1.5** Utilize o símbolo de desigualdade apropriado (< ou >) entre cada par de números reais.

(a) 2, 5

(c) 3, -1

(e) -4, -3

(g)  $\sqrt{7}$ , 3

(i)  $-3/5$ ,  $-1/2$

(b) 0, 2

(d) -4, +2

(f)  $\pi$ , 3

(h)  $-\sqrt{2}$ , -1

**Solução**(a)  $2 < 5$  (ou  $5 > 2$ ), i.e., 2 é menor que 5 (ou 5 é maior que 2)(b)  $0 < 2$  (ou  $2 > 0$ )(c)  $3 > -1$  (ou  $-1 < 3$ )(d)  $-4 < +2$  (ou  $+2 > -4$ )(e)  $-4 < -3$  (ou  $-3 > -4$ )(f)  $\pi > 3$  (ou  $3 < \pi$ )(g)  $3 > \sqrt{7}$  (ou  $\sqrt{7} < 3$ )(h)  $-\sqrt{2} < -1$  ( $-1 > -\sqrt{2}$ )(i)  $-3/5 < -1/2$  visto que  $-0,6 < -0,5$ **1.6** Organize os seguintes grupos de números reais em ordem crescente de magnitude.(a)  $-3, 22/7, \sqrt{5}, -3,2, 0$ (b)  $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -1,6, -3/2$ **Solução**(a)  $-3,2 < -3 < 0 < \sqrt{5} < 22/7$ (b)  $-\sqrt{3} < -1,6 < -3/2 < -\sqrt{2}$ **1.7** Escreva o valor absoluto de cada um dos seguintes números reais.

$$-1, +3, 2/5, -\sqrt{2}, -3,14, 2,83, -3/8, -\pi, +5/7$$

**Solução**

Podemos escrever os valores absolutos desses números como

$$|-1|, |+3|, |2/5|, |-\sqrt{2}|, |-3,14|, |2,83|, |-3/8|, |-\pi|, |+5/7|$$

que, por sua vez, se escrevem como 1, 3, 2/5,  $\sqrt{2}$ , 3,14, 2,83, 3/8,  $\pi$ , 5/7 respectivamente.**1.8** A seguir, estão ilustradas a adição e a subtração de alguns números reais.(a)  $(-3) + (-8) = -11$ (d)  $-2 + 5 = 3$ (g)  $50 - 23 - 27 = 0$ (b)  $(-2) + 3 = 1$ (e)  $-15 + 8 = -7$ (h)  $-3 - (-4) = -3 + 4 = 1$ (c)  $(-6) + 3 = -3$ (f)  $(-32) + 48 + (-10) = 6$ (i)  $-(-14) + (-2) = 14 - 2 = 12$ **1.9** Escreva a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  dos seguintes pares de números reais:(a)  $-2, 2$ ;(b)  $-3, 6$ ;(c)  $0, -5$ ;(d)  $-5, 0$ **Solução**(a)  $S = -2 + 2 = 0, D = (-2) - 2 = -4, P = (-2)(2) = -4, Q = -2/2 = -1$ (b)  $S = (-3) + 6 = 3, D = (-3) - 6 = -9, P = (-3)(6) = -18, Q = -3/6 = -1/2$ (c)  $S = 0 + (-5) = -5, D = 0 - (-5) = 5, P = (0)(-5) = 0, Q = 0/-5 = 0$ (d)  $S = (-5) + 0 = -5, D = (-5) - 0 = -5, P = (-5)(0) = 0, Q = -5/0$  (que é uma operação não definida, logo não é um número).**1.10** Efetue as operações indicadas:(a)  $(5)(-3)(-2) = [(5)(-3)](-2) = (-15)(-2) = 30$ 

$$= (5)[(-3)(-2)] = (5)(6) = 30$$

A disposição dos fatores de um produto não afeta o resultado.

$$(b) 8(-3)(10) = -240$$

$$(c) \frac{8(-2)}{-4} + \frac{(-4)(-2)}{2} = \frac{-16}{-4} + \frac{8}{2} = 4 + 4 = 8$$

$$(d) \frac{12(-40)(-12)}{5(-3) - 3(-3)} = \frac{12(-40)(-12)}{-15 - (-9)} = \frac{12(-40)(-12)}{-6} = -960$$

**1.11** Calcule o seguinte:

$$(a) 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(b) 5(3)^2 = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$$

$$(c) 2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$$

$$(d) 2^5 \cdot 5^2 = (32)(25) = 800$$

$$(e) \frac{3^4 \cdot 3^3}{3^2} = \frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$$

$$(f) \frac{5^2 \cdot 5^3}{5^7} = \frac{5^5}{5^7} = \frac{1}{5^{7-5}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$(g) (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$(h) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$(i) \frac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^4}{(-3)^{15} \cdot 3^4} = \frac{3^{12} \cdot 3^8}{-3^{15} \cdot 3^4} = -\frac{3^{20}}{3^{19}} = -3^1 = -3$$

$$(j) \frac{3^8}{3^5} - \frac{4^2 \cdot 2^4}{2^6} + 3(-2)^3 = 3^3 - \frac{4^2}{2^2} + 3(-8) = 27 - 4 - 24 = -1$$

**1.12** Escreva cada uma das seguintes frações como uma fração equivalente com o denominador indicado.

$$(a) 1/3; 6$$

$$(b) 3/4; 20$$

$$(c) 5/8; 48$$

$$(d) -3/7; 63$$

$$(e) -12/5; 75$$

### Solução

(a) Para obter o denominador 6, multiplique o numerador e o denominador da fração  $1/3$  por 2.

$$\text{Então } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{6}.$$

$$(b) \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$(d) -\frac{3}{7} = -\frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = -\frac{27}{63}$$

$$(c) \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{30}{48}$$

$$(e) -\frac{12}{5} = -\frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 15} = -\frac{180}{75}$$

**1.13** Encontre a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  dos seguintes pares de números racionais:

(a)  $1/3, 1/6$ ; (b)  $2/5, 3/4$ ; (c)  $-4/15, -11/24$ .

**Solução**

(a)  $1/3$  pode ser escrita como a fração equivalente  $2/6$ .

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18}$$

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad Q = \frac{1/3}{1/6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

(b)  $2/5$  e  $3/4$  podem ser expressas com denominador 20:  $2/5 = 8/20$ ,  $3/4 = 15/20$ .

$$S = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} \quad P = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$D = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{7}{20} \quad Q = \frac{2/5}{3/4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

(c)  $-4/15$  e  $-11/24$  tem como menor denominador comum 120:  $-4/15 = -32/120$ ,  $-11/24 = -55/120$ .

$$S = \left(-\frac{4}{15}\right) + \left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{32}{120} - \frac{55}{120} = -\frac{87}{120} = -\frac{29}{40} \quad P = \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{11}{24}\right) = \frac{11}{90}$$

$$D = \left(-\frac{4}{15}\right) - \left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{32}{120} + \frac{55}{120} = \frac{23}{120} \quad Q = \frac{-4/15}{-11/24} = \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{24}{11}\right) = \frac{32}{55}$$

**1.14** Efetue as seguintes expressões, dados  $x = 2$ ,  $y = -3$ ,  $z = 5$ ,  $a = 1/2$ ,  $b = -2/3$ .

(a)  $2x + y = 2(2) + (-3) = 4 - 3 = 1$

(b)  $3x - 2y - 4z = 3(2) - 2(-3) - 4(5) = 6 + 6 - 20 = -8$

(c)  $4x^2y = 4(2)^2(-3) = 4 \cdot 4 \cdot (-3) = -48$

(d)  $\frac{x^3 + 4y}{2a - 3b} = \frac{2^3 + 4(-3)}{2(1/2) - 3(-2/3)} = \frac{8 - 12}{1 + 2} = -\frac{4}{3}$

(e)  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(\frac{2}{-3}\right)^2 - 3\left(\frac{-2/3}{1/2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - 3\left(-\frac{64}{27}\right) = \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{68}{9}$

**Problemas Complementares**

**1.15** Escreva a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  dos pares de números a seguir:

(a) 54, 18; (b) 4, 0; (c) 0, 4; (d) 12, 24; (e) 50, 75.

**1.16** Calcule cada operação indicada.

(a)  $38 + 57$ ,  $57 + 38$

(b)  $15 + (33 + 8)$ ,  $(15 + 33) + 8$

(c)  $(23 + 64) - (41 + 12)$

(d)  $12 \cdot 8$ ,  $8 \cdot 12$

(e)  $6(4 \cdot 8)$ ,  $(6 \cdot 4)8$

(f)  $42 \cdot 68$

(g)  $1296 \div 36$

(h)  $\frac{(35 - 23)(28 + 17)}{43 - 25}$

(i)  $45 \div 15 + 84 \div 12$

(j)  $10 \div 5 - 4 \div 2 + 15 \div 3 + 2 \cdot 5$

(k)  $112 \div (4 \cdot 7)$ ,  $(112 \div 4) \cdot 7$

(l)  $\frac{15 + 3 \cdot 2}{9 - 4 \div 2}$

**1.17** Aplique o símbolo de desigualdade apropriado ( $<$  ou  $>$ ) entre cada par de números reais a seguir.

(a) 4, 3      (c)  $-1, 2$       (e)  $-8, -7$       (g)  $-3, -\sqrt{11}$   
 (b)  $-2, 0$       (d)  $3, -2$       (f)  $1, \sqrt{2}$       (h)  $-1/3, -2/5$

**1.18** Organize os seguintes grupos de números reais em ordem crescente de magnitude.

(a)  $-\sqrt{3}, -2, \sqrt{6}, -2, 8, 4, 7/2$       (b)  $2\pi, -6, \sqrt{8}, -3\pi, 4, 8, 19/3$

**1.19** Escreva o valor absoluto de cada número real a seguir:  $2, -3/2, -\sqrt{6}, +3.14, 0, 5/3, \sqrt{4}, -0,001, -\pi - 1$ .

**1.20** Calcule.

(a)  $6 + 5$       (d)  $6 + (-4)$       (g)  $(-18) + (-3) + 22$       (j)  $-(-16) - (-12) + (-5) - 15$   
 (b)  $(-4) + (-6)$       (e)  $-8 + 4$       (h)  $40 - 12 + 4$   
 (c)  $(-4) + 3$       (f)  $-4 + 8$       (i)  $-12 - (-8)$

**1.21** Escreva a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  de cada par de números reais:

(a) 12, 4; (b)  $-6, -3$ ; (c)  $-8, 4$ ; (d) 0,  $-4$  (e) 3,  $-2$ .

**1.22** Efetue as operações indicadas.

(a)  $(-3)(2)(-6)$       (c)  $4(-1)(5) + (-3)(2)(-4)$       (e)  $(-8) \div (-4) + (-3)(2)$   
 (b)  $(6)(-8)(-2)$       (d)  $\frac{(-4)(6)}{-3} + \frac{(-16)(-9)}{12}$       (f)  $\frac{(-3)(8)(-2)}{(-4)(-6) - (2)(-12)}$

**1.23** Calcule.

(a)  $3^3$       (e)  $\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^5}$       (i)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 2^5$   
 (b)  $3(4)^2$       (f)  $\frac{3^4 \cdot 3^8}{3^6 \cdot 3^5}$       (j)  $\frac{(-2)^3 \cdot (2)^3}{3(2^2)^2}$   
 (c)  $2^4 \cdot 2^3$       (g)  $\frac{7^5}{7^3 \cdot 7^4}$       (k)  $\frac{3(-3)^2 + 4(-2)^3}{2^3 - 3^2}$   
 (d)  $4^2 \cdot 3^2$       (h)  $(3^2)^3$       (l)  $\frac{5^7}{5^4} + \frac{2^{10}}{8^2 \cdot (-2)^3} - 4(-3)^4$

**1.24** Escreva cada fração a seguir como uma fração equivalente com o denominador indicado.

(a)  $2/5; 15$       (c)  $5/16; 64$       (e)  $11/12; 132$   
 (b)  $-4/7; 28$       (d)  $-10/3; 42$       (f)  $17/18; 90$

**1.25** Encontre a soma  $S$ , a diferença  $D$ , o produto  $P$  e o quociente  $Q$  de cada par de números racionais:

(a)  $1/4, 3/8$ ; (b)  $1/3, 2/5$ ; (c)  $-4, 2/3$ ; (d)  $-2/3, -3/2$ .

**1.26** Efetue as seguintes expressões, dados  $x = -2, y = 4, z = 1/3, a = -1, b = 1/2$ .

(a)  $3x - 2y + 6z$       (d)  $\frac{3y^2 - 4x}{ax + by}$   
 (b)  $2xy + 6az$       (e)  $\frac{x^2y(x+y)}{3x+4y}$   
 (c)  $4b^2x^3$       (f)  $\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{xy}{z^2}$

**Respostas dos Problemas Complementares**

- 1.15** (a)  $S = 72, D = 36, P = 972, Q = 3$  (d)  $S = 36, D = -12, P = 288, Q = 1/2$   
 (b)  $S = 4, D = 4, P = 0, Q$  não definido (e)  $S = 125, D = -25, P = 3750, Q = 2/3$   
 (c)  $S = 4, D = -4, P = 0, Q = 0$
- 1.16** (a) 95, 95 (c) 34 (e) 192, 192 (g) 36 (i) 10 (k) 4, 196  
 (b) 56, 56 (d) 96, 96 (f) 2856 (h) 30 (j) 15 (l) 3
- 1.17** (a)  $3 < 4$  ou  $4 > 3$  (d)  $-2 < 3$  ou  $3 > -2$  (g)  $-\sqrt{11} < -3$  ou  $-3 > -\sqrt{11}$   
 (b)  $-2 < 0$  ou  $0 > -2$  (e)  $-8 < -7$  ou  $-7 > -8$  (h)  $-2/5 < -1/3$  ou  $-1/3 > -2/5$   
 (c)  $-1 < 2$  ou  $2 > -1$  (f)  $1 < \sqrt{2}$  ou  $\sqrt{2} > 1$
- 1.18** (a)  $-2,8 < -2 < -\sqrt{3} < \sqrt{6} < 7/2 < 4$  (b)  $-3\pi < -6 < \sqrt{8} < 4,8 < 2\pi < 19/3$
- 1.19** 2, 3/2,  $\sqrt{6}$ , 3, 14, 0, 5/3,  $\sqrt{4}$ , 0,001,  $\pi + 1$
- 1.20** (a) 11 (c) -1 (e) -4 (g) 1 (i) -4  
 (b) -10 (d) 2 (f) 4 (h) 32 (j) 8
- 1.21** (a)  $S = 16, D = 8, P = 48, Q = 3$  (d)  $S = -4, D = 4, P = 0, Q = 0$   
 (b)  $S = -9, D = -3, P = 18, Q = 2$  (e)  $S = 1, D = 5, P = -6, Q = -3/2$   
 (c)  $S = -4, D = -12, P = -32, Q = -2$
- 1.22** (a) 36 (b) 96 (c) 4 (d) 20 (e) -4 (f) 1
- 1.23** (a) 27 (c) 128 (e)  $5^4 = 625$  (g) 1/49 (i) 1/2 (k) 5  
 (b) 48 (d) 144 (f) 3 (h)  $3^6 = 729$  (j) -4/3 (l) -201
- 1.24** (a) 6/15 (b) -16/28 (c) 20/64 (d) -140/42 (e) 121/132 (f) 85/90
- 1.25** (a)  $S = 5/8, D = -1/8, P = 3/32, Q = 2/3$   
 (b)  $S = 11/15, D = -1/15, P = 2/15, Q = 5/6$   
 (c)  $S = -10/3, D = -14/3, P = -8/3, Q = -6$   
 (d)  $S = -13/6, D = 5/6, P = 1, Q = 4/9$
- 1.26** (a) -12 (b) -18 (c) -8 (d) 14 (e) 16/5 (f) 48

# Capítulo 2

## Operações Fundamentais com Expressões Algébricas

---

### 2.1 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Uma expressão algébrica é uma combinação de números e letras representando números.

Dessa forma,  $3x^2 - 5xy + 2y^4$ ,  $2a^3b^5$ ,  $\frac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2}$

são expressões algébricas.

Um termo consiste em produtos e quocientes de números e letras representando números. Assim,  $6x^2y^3$ ,  $5x/3y^4$ ,  $-3x^7$  são termos.

Entretanto,  $6x^2 + 7xy$  é uma expressão algébrica constituída por dois termos.

Um monômio é uma expressão algébrica que consiste em apenas um termo. Logo,  $7x^3y^4$ ,  $3xyz^2$ ,  $4x^2/y$  são monômios.

Devido a essa definição, monômios também são chamados apenas de termos.

Um binômio é uma expressão algébrica que consiste em dois termos. Assim,  $2x + 4y$ ,  $3x^4 - 4xyz^3$  são binômios.

Um trinômio é uma expressão algébrica que possui três termos. Dessa maneira,  $3x^2 - 5x + 2$ ,  $2x + 6y - 3z$ ,  $x^3 - 3xy/z - 2x^3z^7$  são trinômios.

Um multinômio é uma expressão algébrica que consiste em dois ou mais termos. Assim,  $7x + 6y$ ,  $3x^3 + 6x^2y - 7xy + 6$ ,  $7x + 5x^2/y - 3x^3/16$  são multinômios.

### 2.2 TERMOS

Um fator de um termo é dito coeficiente do restante do termo. Assim, no termo  $5x^3y^2$ ,  $5x^3$  é o coeficiente de  $y^2$ ,  $5y^2$  é o coeficiente de  $x^3$  e  $5$  é o coeficiente de  $x^3y^2$ .

Se um termo consiste no produto de um número por uma ou mais letras, chamamos o número de coeficiente numérico (ou apenas coeficiente) do termo. Logo, em  $-5x^3y^2$ ,  $-5$  é o coeficiente numérico, ou simplesmente o coeficiente.

Termos semelhantes são termos que diferem apenas por coeficientes numéricos. Por exemplo,  $7xy$  e  $-2xy$  são termos semelhantes;  $3x^2y^4$  e  $-\frac{1}{2}x^2y^4$  são termos semelhantes; contudo,  $-2a^2b^3$  e  $-3a^2b^7$  são termos não semelhantes.

Dois ou mais termos semelhantes em uma expressão algébrica podem ser reunidos em apenas um. Desta forma, podemos escrever  $7x^2y - 4x^2y + 2x^2y$  como  $5x^2y$ .

Um termo é inteiro e racional em certos literais (letras que representam números) se o termo consiste em

- (a) potências inteiras positivas das variáveis multiplicadas por um fator sem nenhuma variável, ou  
 (b) nenhuma variável.

Por exemplo, os termos  $6x^2y^3$ ,  $-5y^4$ ,  $7$ ,  $-4x$  e  $\sqrt{3}x^3y^6$  são inteiros e racionais nas variáveis presentes. Entretanto,  $3\sqrt{x}$  não é racional em  $x$  e  $4/x$  não é inteiro em  $x$ .

Um polinômio é um monômio ou uma soma de monômios na qual cada termo é inteiro e racional.

Por exemplo,  $3x^2y^3 - 5x^4y + 2$ ,  $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $4xy + z$  e  $3x^2$  são polinômios. Todavia,  $3x^2 - 4/x$  e  $4\sqrt{y} + 3$  não são polinômios.

## 2.3 GRAU

O grau de um monômio é a soma de todos os expoentes das variáveis no termo. Logo, o grau de  $4x^3y^2z$  é  $3 + 2 + 1 = 6$ . O grau de uma constante, como  $6$ ,  $0$ ,  $-\sqrt{3}$  ou  $\pi$ , é zero.

O grau de um polinômio é o mesmo do termo que possui maior grau e coeficiente não nulo. Assim,  $7x^3y^2 - 4xz^5 + 2x^3y$  tem termos de grau 5, 6 e 4, respectivamente; portanto, o grau deste polinômio é 6.

## 2.4 AGRUPAMENTO

Um símbolo de agrupamento como parênteses ( ), colchetes [ ] ou chaves { } é usado para mostrar que os termos neles contidos são considerados uma única quantidade.

Por exemplo, a soma de duas expressões algébricas  $5x^2 - 3x + y$  e  $2x - 3y$  pode ser escrita  $(5x^2 - 3x + y) + (2x - 3y)$ . A diferença delas pode se escrever  $(5x^2 - 3x + y) - (2x - 3y)$  e seu produto  $(5x^2 - 3x + y)(2x - 3y)$ .

A remoção dos símbolos de agrupamento é regida pelas seguintes regras:

- (1) Se um sinal + precede um símbolo de agrupamento, este símbolo de agrupamento pode ser removido sem afetar os termos nele contidos.

$$\text{Então,} \quad (3x + 7y) + (4xy - 3x^3) = 3x + 7y + 4xy - 3x^3.$$

- (2) Se um sinal - precede um símbolo de agrupamento, este símbolo pode ser removido mediante a mudança de sinal de cada termo nele contido.

$$\text{Dessa maneira,} \quad (3x + 7y) - (4xy - 3x^3) = 3x + 7y - 4xy + 3x^3.$$

- (3) Se mais de um símbolo de agrupamento está presente, os mais internos devem ser removidos primeiro.

$$\text{Logo,} \quad 2x - \{4x^3 - (3x^2 - 5y)\} = 2x - \{4x^3 - 3x^2 + 5y\} = 2x - 4x^3 + 3x^2 - 5y.$$

## 2.5 CONTAS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

A adição de expressões algébricas é obtida combinando-se termos semelhantes. Para se efetuar tal adição, as expressões podem ser organizadas em linhas com termos semelhantes na mesma coluna; estas colunas são adicionadas.

**Exemplo 2.1** Adicione  $7x + 3y^3 - 4xy$ ,  $3x - 2y^3 + 7xy$  e  $2xy - 5x - 6y^3$ .

$$\begin{array}{r} \text{Escreva:} \quad 7x \quad 3y^3 \quad -4xy \\ \quad \quad 3x \quad -2y^3 \quad 7xy \\ \quad \quad -5x \quad -6y^3 \quad 2xy \\ \hline \text{Adicione:} \quad 5x \quad -5y^3 \quad 5xy. \end{array} \quad \text{Portanto, o resultado é } 5x - 5y^3 + 5xy.$$

A subtração de duas expressões algébricas é obtida alterando-se o o sinal em cada termo na expressão que está sendo subtraída (às vezes chamado de subtraendo) e adicionando-se este resultado à outra expressão (denominada minuendo).

**Exemplo 2.2** Subtraia  $2x^2 - 3xy + 5y^2$  de  $10x^2 - 2xy - 3y^2$ .

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 2xy - 3y^2 \\ 2x^2 - 3xy + 5y^2 \\ \hline \text{Subtração: } 8x^2 + xy - 8y^2 \end{array}$$

Também podemos escrever  $(10x^2 - 2xy - 3y^2) - (2x^2 - 3xy + 5y^2) = 10x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 8x^2 + xy - 8y^2$ .

A multiplicação de expressões algébricas é obtida multiplicando-se os termos nos fatores das expressões.

- (1) Para multiplicar dois monômios ou mais: utilize as regras para expoentes, as regras de sinais e as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

**Exemplo 2.3** Multiplique  $-3x^2y^3z$ ,  $2x^4y$  e  $-4xy^4z^2$ .

Escreva  $(-3x^2y^3z)(2x^4y)(-4xy^4z^2)$ .

Rearranje de acordo com a comutatividade e a associatividade,

$$\{(-3)(2)(-4)\}\{(x^2)(x^4)(x)\}\{(y^3)(y)(y^4)\}\{(z)(z^2)\}. \quad (1)$$

Combine utilizando regras de sinais e expoentes para obter

$$24x^7y^8z^3.$$

Com experiência, o passo (1) pode ser feito mentalmente.

- (2) Para multiplicar um polinômio por um monômio: multiplique cada termo do polinômio pelo monômio e combine os resultados.

**Exemplo 2.4** Multiplique  $3xy - 4x^3 + 2xy^2$  por  $5x^2y^4$ .

Escreva

$$\begin{aligned} (5x^2y^4)(3xy - 4x^3 + 2xy^2) \\ = (5x^2y^4)(3xy) + (5x^2y^4)(-4x^3) + (5x^2y^4)(2xy^2) \\ = 15x^3y^5 - 20x^5y^4 + 10x^3y^6. \end{aligned}$$

- (3) Para multiplicar um polinômio por um polinômio: multiplique cada termo de um polinômio pelos termos do outro polinômio e adicione os resultados.

Em geral, é vantajoso organizar os polinômios de acordo com a ordem crescente (ou decrescente) das potências das letras envolvidas.

**Exemplo 2.5** Multiplique  $-3x + 9 + x^2$  por  $3 - x$ .

Organizando em ordem decrescente das potências de  $x$ ,

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 9 \\ -x + 3 \\ \hline \text{Multiplicando (2) por } -x, \quad -x^3 + 3x^2 - 9x \\ \text{Multiplicando (2) por } 3, \quad 3x^2 - 9x + 27 \\ \hline \text{Adicionando,} \quad -x^3 + 6x^2 - 18x + 27 \end{array} \quad (2)$$

A divisão de expressões algébricas é obtida usando-se a regra da divisão de expoentes.

- (1) Para dividir um monômio por um monômio: encontre o quociente dos coeficientes numéricos e o quociente das variáveis e multiplique os dois.

**Exemplo 2.6** Divida  $24x^4y^2z^3$  por  $-3x^3y^4z$ .

Escreva 
$$\frac{24x^4y^2z^3}{-3x^3y^4z} = \left(\frac{24}{-3}\right)\left(\frac{x^4}{x^3}\right)\left(\frac{y^2}{y^4}\right)\left(\frac{z^3}{z}\right) = (-8)(x)\left(\frac{1}{y^2}\right)(z^2) = -\frac{8xz^2}{y^2}.$$

- (2) Para dividir um polinômio por um polinômio:
- Organize os termos dos dois polinômios em ordem decrescente (ou crescente) das potências de uma variável comum a ambos.
  - Divida o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor. Isto dá o primeiro termo do quociente.
  - Multiplique o primeiro termo do quociente pelo divisor e subtraia do dividendo, obtendo assim um novo dividendo.
  - Utilize o dividendo em (c) para repetir os passos (b) e (c) até obter um resto que possua grau mais baixo que o grau do divisor ou que seja nulo.
  - O resultado se escreve:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{quociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}.$$

**Exemplo 2.7** Divida  $x^2 + 2x^4 - 3x^3 + x - 2$  por  $x^2 - 3x + 2$ .

Escreva os polinômios em ordem decrescente de potências de  $x$  e organize como segue.

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 \quad | \quad x^2 - 3x + 2 \\ \underline{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} \phantom{+ x - 2} \quad 2x^2 + 3x + 6 \\ 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 6x} \phantom{- 2} \\ 6x^2 - 5x - 2 \\ \underline{6x^2 - 18x + 12} \\ 13x - 14 \end{array}$$

Portanto, 
$$\frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 3x + 6 + \frac{13x - 14}{x^2 - 3x + 2}$$

## Problemas Resolvidos

**2.1** Resolva cada uma das seguintes expressões algébricas, dados  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = 3$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ,  $c = 1/3$ .

- $2x^2 - 3yz = 2(2)^2 - 3(-1)(3) = 8 + 9 = 17$
- $2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 2(3)^4 - 3(3)^3 + 4(3)^2 - 2(3) + 3 = 162 - 81 + 36 - 6 + 3 = 114$
- $4a^2 - 3ab + 6c = 4(0)^2 - 3(0)(4) + 6(1/3) = 0 - 0 + 2 = 2$
- $\frac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2} = \frac{5(2)(-1) + 3(3)}{2(0)^3 - (1/3)^2} = \frac{-10 + 9}{-1/9} = \frac{-1}{-1/9} = 9$
- $\frac{3x^2y}{z} - \frac{bc}{x+1} = \frac{3(2)^2(-1)}{3} - \frac{4(1/3)}{3} = -4 - 4/9 = -40/9$
- $\frac{4x^2y(z-1)}{a+b-3c} = \frac{4(2)^2(-1)(3-1)}{0+4-3(1/3)} = \frac{4(4)(-1)(2)}{4-1} = -\frac{32}{3}$

**2.2** Classifique as seguintes expressões algébricas de acordo com as categorias: termo ou monômio, binômio, trinômio e polinômio.

- (a)  $x^3 + 3y^2z$  (d)  $y + 3$  (g)  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
 (b)  $2x^2 - 5x + 3$  (e)  $4z^2 + 3z - 2\sqrt{z}$  (h)  $\sqrt{y} + \sqrt{z}$   
 (c)  $4x^2y/z$  (f)  $5x^3 + 4/y$  (i)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

**Solução**

Se a expressão pertence a uma ou mais categorias, indicamos com um sinal de visto.

	Termo ou monômio	Binômio	Trinômio	Polinômio
$x^3 + 3y^2z$		✓		✓
$2x^2 - 5x + 3$			✓	✓
$4x^2y/z$	✓			
$y + 3$		✓		✓
$4z^2 + 3z - 2\sqrt{z}$			✓	
$5x^3 + 4/y$		✓		
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	✓			
$\sqrt{y} + \sqrt{z}$		✓		
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$				✓

**2.3** Encontre o grau de cada polinômio a seguir.

- (a)  $2x^3y + 4xyz^4$ . O grau de  $2x^3y$  é 4 e o de  $4xyz^4$  é 6; portanto o polinômio tem grau 6.  
 (b)  $x^2 + 3x^3 - 4$ . O grau de  $x^2$  é 2, o de  $3x^3$  é 3 e o de  $-4$  é 0; logo o grau do polinômio é 3.  
 (c)  $y^3 - 3y^2 + 4y - 2$  possui grau 3.  
 (d)  $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z + x^4$ . O grau de cada termo é 4; Logo, o polinômio é de grau 4.  
 (e)  $x^2 - 10^5$  é de grau 2. (O grau da constante  $10^5$  é 0.)

**2.4** Remova os símbolos de agrupamento e simplifique as expressões resultantes combinando termos semelhantes.

- (a)  $3x^2 + (y^2 - 4z) - (2x - 3y + 4z) = 3x^2 + y^2 - 4z - 2x + 3y - 4z = 3x^2 + y^2 - 2x + 3y - 8z$   
 (b)  $2(4xy + 3z) + 3(x - 2xy) - 4(z - 2xy) = 8xy + 6z + 3x - 6xy - 4z + 8xy = 10xy + 3x + 2z$   
 (c)  $x - 3 - 2\{2 - 3(x - y)\} = x - 3 - 2\{2 - 3x + 3y\} = x - 3 - 4 + 6x - 6y = 7x - 6y - 7$   
 (d)  $4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y)] + 4\} = 4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3x^2 + 3y] + 4\}$   
 $= 4x^2 - \{3x^2 - 2y + 6x^2 - 6y + 4\} = 4x^2 - \{9x^2 - 8y + 4\}$   
 $= 4x^2 - 9x^2 + 8y - 4 = -5x^2 + 8y - 4$

**2.5** Adicione as expressões algébricas nos seguintes grupos.

- (a)  $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2yz, \quad y^2 + z^2 - x^2 + 2yz - 2zx, \quad z^2 + x^2 - y^2 + 2zx - 2xy,$   
 $1 - x^2 - y^2 - z^2$

**Solução**

Organizando,

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2yz \\ -x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2zx \\ x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 2zx \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 1 \end{array}$$

Adicionando,  $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1$  o resultado da adição é 1.

(b)  $5x^3y - 4ab + c^2, 3c^2 + 2ab - 3x^2y, x^3y + x^2y - 4c^2 - 3ab, 4c^2 - 2x^2y + ab^2 - 3ab$

**Solução**

Organizando,

$$\begin{array}{r} 5x^3y - 4ab + c^2 \\ -3x^2y + 2ab + 3c^2 \\ x^2y + x^3y - 3ab - 4c^2 \\ -2x^2y - 3ab + 4c^2 + ab^2 \end{array}$$

Adicionando,  $-4x^2y + 6x^3y - 8ab + 4c^2 + ab^2$

**2.6** Subtraia a segunda expressão da primeira.

(a)  $a - b + c - d, c - a + d - b.$

**Solução**

Escreva

$$\begin{array}{r} a - b + c - d \\ -a - b + c + d \end{array}$$

Subtraindo,  $2a + 0 + 0 - 2d$  o resultado é  $2a - 2d.$

Alternativamente:  $(a - b + c - d) - (c - a + d - b) = a - b + c - d - c + a - d + b = 2a - 2d$

(b)  $4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy, 4xy + ab^2 - 3a^2 + 2ab.$

**Solução**

Escreva

$$\begin{array}{r} 4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy \\ 2ab - 3a^2 + 4xy + ab^2 \end{array}$$

Subtraindo,  $4x^2y - 5ab + 5a^2 - 5xy - ab^2$

Alternativamente:  $(4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy) - (4xy + ab^2 - 3a^2 + 2ab)$   
 $= 4x^2y - 3ab + 2a^2 - xy - 4xy - ab^2 + 3a^2 - 2ab$   
 $= 4x^2y - 5ab + 5a^2 - 5xy - ab^2$

**2.7** Encontre o produto das seguintes expressões algébricas.

- (a)  $(-2ab^3)(4a^2b^5)$
- (b)  $(-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4)$
- (c)  $(3ab^2)(2ab + b^2)$
- (d)  $(x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2)$
- (e)  $(x^2 - 3x + 9)(x + 3)$
- (f)  $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$
- (g)  $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
- (h)  $(2x + y - z)(3x - z + y)$

**Solução**

$$(a) (-2ab^3)(4a^2b^5) = \{(-2)(4)\}\{(a)(a^2)\}\{(b^3)(b^5)\} = -8a^3b^8$$

$$(b) (-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4) = \{(-3)(4)(-2)\}\{(x^2)(x)(x^3)\}\{(y)(y^2)(y^4)\} = 24x^6y^7$$

$$(c) (3ab^2)(2ab + b^2) = (3ab^2)(2ab) + (3ab^2)(b^2) = 6a^2b^3 + 3ab^4$$

$$(d) (x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2) = (x^2)(4xy^2) + (-3xy)(4xy^2) + (y^2)(4xy^2) = 4x^3y^2 - 12x^2y^3 + 4xy^4$$

$$(e) \begin{array}{r} x^2 - 3x + 9 \\ \hline x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 9x \\ \hline 3x^2 - 9x + 27 \\ \hline x^3 + 0 + 0 + 27 \\ \hline \text{Resp. } x^3 + 27 \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{r} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\ \hline x - y \\ \hline x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\ \hline -x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\ \hline x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 - y^5 \\ \hline \text{Resp. } x^5 - y^5 \end{array}$$

$$(g) \begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \\ \hline x^2 + xy + y^2 \\ \hline x^4 - x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^3y - x^2y^2 + xy^3 \\ \hline x^2y^2 - xy^3 + y^4 \\ \hline x^4 + 0 + x^2y^2 + 0 + y^4 \\ \hline \text{Resp. } x^4 + x^2y^2 + y^4 \end{array}$$

$$(h) \begin{array}{r} 2x + y - z \\ \hline 3x + y - z \\ \hline 6x^2 + 3xy - 3xz \\ \hline 2xy \quad + y^2 - yz \\ \hline -2xz \quad - yz + z^2 \\ \hline 6x^2 + 5xy - 5xz + y^2 - 2yz + z^2 \end{array}$$

**2.8** Efetue as divisões indicadas.

$$(a) \frac{24x^3y^2z}{4xyz^2} = \left(\frac{24}{4}\right)\left(\frac{x^3}{x}\right)\left(\frac{y^2}{y}\right)\left(\frac{z}{z^2}\right) = (6)(x^2)(y)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{6x^2y}{z}$$

$$(b) \frac{-16a^4b^6}{-8ab^2c} = \left(\frac{-16}{-8}\right)\left(\frac{a^4}{a}\right)\left(\frac{b^6}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{2a^3b^4}{c}$$

$$(c) \frac{3x^3y + 16xy^2 - 12x^4yz^4}{2x^2yz} = \left(\frac{3x^3y}{2x^2yz}\right) + \left(\frac{16xy^2}{2x^2yz}\right) + \left(\frac{-12x^4yz^4}{2x^2yz}\right) = \frac{3x}{2z} + \frac{8y}{xz} - 6x^2z^3$$

$$(d) \frac{4a^3b^2 + 16ab - 4a^2}{-2a^2b} = \left(\frac{4a^3b^2}{-2a^2b}\right) + \left(\frac{16ab}{-2a^2b}\right) + \left(\frac{-4a^2}{-2a^2b}\right) = -2ab - \frac{8}{a} + \frac{2}{b}$$

$$(e) \begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 \\ \hline 2x^4 - 4x^3 \\ \hline 7x^3 - x^2 \\ \hline 7x^3 - 14x^2 \\ \hline 13x^2 \\ \hline 13x^2 - 26x \\ \hline 26x - 1 \\ \hline 26x - 52 \\ \hline 51 \end{array} \quad -1 \overline{)x - 2} \quad (f) \begin{array}{r} 16y^4 \\ \hline 16y^4 - 8y^3 \\ \hline 8y^3 - 1 \\ \hline 8y^3 - 4y^2 \\ \hline 4y^2 - 1 \\ \hline 4y^2 - 2y \\ \hline 2y - 1 \\ \hline 2y - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Assim, } \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 + \frac{51}{x - 2} \quad \text{e} \quad \frac{16y^4 - 1}{2y - 1} = 8y^3 + 4y^2 + 2y + 1.$$

$$(g) \frac{2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1}{-x^2 + x + 1}.$$

Organize em ordem decrescente as potências de  $x$ .

$$\begin{array}{r} 2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1 \\ \underline{2x^6 - 2x^5 - 2x^4} \\ 2x^5 + 7x^4 - x^3 + 1 \\ \underline{2x^5 - 2x^4 - 2x^3} \\ 9x^4 + x^3 + 1 \\ \underline{9x^4 - 9x^3 - 9x^2} \\ 10x^3 + 9x^2 + 1 \\ \underline{10x^3 - 10x^2 - 10x} \\ 19x^2 + 10x + 1 \\ \underline{19x^2 - 19x - 19} \\ 29x + 20 \end{array}$$

Assim,  $\frac{2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1}{-x^2 + x + 1} = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19 + \frac{29x + 20}{-x^2 + x + 1}$

(h)  $\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3}{x^2 - xy + y^2}$ .

Organize em ordem decrescente as potências de alguma letra, digamos  $x$ .

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3y + x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3 \\ \underline{x^4 - x^3y + x^2y^2} \\ 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3 \\ \underline{2x^2y - 2xy^2 + 2y^3} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{x^2 - xy + y^2} \\ x^2 + 2y \end{array}$$

Assim,  $\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3}{x^2 - xy + y^2} = x^2 - 2y$ .

**2.9** Confirme os resultados dos Problemas 2.7(h) e 2.8(g) utilizando os valores  $x = 1, y = -1, z = 2$ .

**Solução**

Do problema 2.7(h), temos  $(2x + y - z)(3x - z + y) = 6x^2 + 5xy - 5xz - 2yz + z^2 + y^2$ .

Substitua os valores  $x = 1, y = -1, z = 2$  e obtenha

$$[2(1) + (-1) - 2][3(1) - (2) - 1] = 6(1)^2 + 5(1)(-1) - 5(1)(2) - 2(-1)(2) + (2)^2 + (-1)^2$$

ou

$$[-1][0] = 6 - 5 - 10 + 4 + 4 + 1, \text{ i.e. } 0 = 0.$$

Do problema 2.8(g), segue

$$\frac{2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1}{-x^2 + x + 1} = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19 + \frac{29x + 20}{-x^2 + x + 1}.$$

Coloque  $x = 1$  e obtenha

$$\frac{2 + 5 - 1 + 1}{-1 + 1 + 1} = -2 - 2 - 9 - 10 - 19 + \frac{29 + 20}{-1 + 1 + 1} \quad \text{ou} \quad 7 = 7.$$

Embora verificar por meio da substituição das variáveis por números não seja conclusivo, pode indicar possíveis erros.

### Problemas Complementares

**2.10** Calcule as expressões, dados  $x = -1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 2$ ,  $a = 1/2$ ,  $b = -2/3$ .

(a)  $4x^3y^2 - 3xz^2$

(e)  $\frac{z(x+y)}{8a^2} - \frac{3ab}{y-x+1}$

(g)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

(b)  $(x-y)(y-z)(z-x)$

(c)  $9ab^2 + 6ab - 4a^2$

(f)  $\frac{(x-y)^2 + 2z}{ax+by}$

(h)  $\frac{(x-1)(y-1)(z-1)}{(a-1)(b-1)}$

(d)  $\frac{xy^2 - 3z}{a+b}$

**2.11** Determine o grau de cada polinômio a seguir.

(a)  $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$

(c)  $x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$

(e)  $-10^3$

(b)  $4xy^4 - 3x^3y^3$

(d)  $\sqrt{3}xyz - 5$

(f)  $y^2 - 3y^5 - y + 2y^3 - 4$

**2.12** Remova os símbolos de agrupamento e simplifique as expressões resultantes, combinando termos semelhantes.

(a)  $(x + 3y - z) - (2y - x + 3z) + (4z - 3x + 2y)$

(b)  $3(x^2 - 2yz + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) + x^2 + y^2$

(c)  $3x + 4y + 3\{x - 2(y - x) - y\}$

(d)  $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + [x - 2y]\}$

**2.13** Adicione as expressões algébricas em cada um dos grupos a seguir.

(a)  $2x^2 + y^2 - x + y$ ,  $3y^2 + x - x^2$ ,  $x - 2y + x^2 - 4y^2$

(b)  $a^2 - ab + 2bc + 3c^2$ ,  $2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$ ,  $ab - 4bc + c^2 - a^2$ ,  $a^2 + 2c^2 + 5bc - 2ab$

(c)  $2a^2bc - 2acb^2 + 5c^2ab$ ,  $4b^2ac + 4bca^2 - 7ac^2b$ ,  $4abc^2 - 3a^2bc - 3ab^2c$ ,  $b^2ac - abc^2 - 3a^2bc$

**2.14** Em cada item, subtraia a segunda expressão da primeira.

(a)  $3xy - 2yz + 4zx$ ,  $3zx + yz - 2xy$

(b)  $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2$ ,  $2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$

(c)  $r^3 - 3r^2s + 4rs^2 - s^3$ ,  $2s^3 + 3s^2r - 2sr^2 - 3r^3$

**2.15** Subtraia  $xy - 3yz + 4xz$  do dobro da soma das expressões  $3xy - 4yz + 2xz$  e  $3yz - 4zx - 2xy$ .

**2.16** Obtenha o produto das expressões algébricas nos seguintes grupos.

(a)  $4x^2y^5$ ,  $-3x^3y^2$

(b)  $3abc^2$ ,  $-2a^3b^2c^4$ ,  $6a^2b^2$

(c)  $-4x^2y$ ,  $3xy^2 - 4xy$

(d)  $r^2s + 3rs^3 - 4rs + s^3$ ,  $2r^2s^4$

(e)  $y - 4$ ,  $y + 3$

(f)  $y^2 - 4y + 16$ ,  $y + 4$

(g)  $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ ,  $x - y$

(h)  $x^2 + 4x + 8$ ,  $x^2 - 4x + 8$

(i)  $3r - s - t^2$ ,  $2s + r + 3t^2$

(j)  $3 - x - y$ ,  $2x + y + 1$ ,  $x - y$

2.17 Realize as divisões indicadas.

$$(a) \frac{-12x^4yz^3}{3x^2y^4z} \quad (b) \frac{-18r^3s^2t}{-4r^5st^2} \quad (c) \frac{4ab^3 - 3a^2bc + 12a^3b^2c^4}{-2ab^2c^3} \quad (d) \frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1}$$

2.18 Realize as divisões indicadas.

$$(a) \frac{27s^3 - 64}{3s - 4} \quad (b) \frac{1 - x^2 + x^4}{1 - x} \quad (c) \frac{2y^3 + y^5 - 3y - 2}{y^2 - 3y + 1} \quad (d) \frac{4x^3y + 5x^2y^2 + x^4 + 2xy^3}{x^2 + 2y^2 + 3xy}$$

2.19 Efetue as operações indicadas e verifique a resposta usando os valores  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

$$(a) (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 - x^2y^2 + x^4)$$

$$(b) \frac{x^4 + xy^3 + x^3y + 2x^2y^2 + y^4}{xy + x^2 + y^2}$$

### Respostas dos Problemas Complementares

2.10 (a) -24 (b) -12 (c) -1 (d) 90 (e) 11/5 (f) -8 (g) -1/6 (h) -24/5

2.11 (a) 4 (b) 6 (c) 5 (d) 3 (e) 0 (f) 5

2.12 (a)  $3y - x$  (b)  $8y^2 + 6yz$  (c)  $12x - 5y$  (d)  $y - 4x + 4$

2.13 (a)  $2x^2 + x - y$  (b)  $a^2 + b^2 + 2c^2$  (c)  $abc^2$

2.14 (a)  $5xy - 3yz + zx$  (b)  $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y - 5$  (c)  $4r^3 - r^2s + rs^2 - 3s^3$

2.15  $xy + yz - 8xz$

2.16 (a)  $-12x^5y^7$  (f)  $y^3 + 64$   
 (b)  $-36a^6b^5c^6$  (g)  $x^4 - y^4$   
 (c)  $-12x^3y^3 + 16x^3y^2$  (h)  $x^4 + 64$   
 (d)  $2r^4s^5 + 6r^3s^7 - 8r^3s^5 + 2r^2s^7$  (i)  $3r^2 + 5rs + 8rt^2 - 2s^2 - 5st^2 - 3t^4$   
 (e)  $y^2 - y - 12$  (j)  $y^3 - 2y^2 - 3y + 3x + 5x^2 - 3xy - 2x^3 - x^2y + 2xy^2$

2.17 (a)  $-\frac{4x^2z^2}{y^3}$  (b)  $\frac{9s}{2r^2t}$  (c)  $-\frac{2b}{c^3} + \frac{3a}{2bc^2} - 6a^2c$  (d)  $4x^2 - 9x + 12 + \frac{-14}{x+1}$

2.18 (a)  $9s^2 + 12s + 16$  (b)  $-x^3 - x^2 + \frac{1}{1-x}$  (c)  $y^3 + 3y^2 + 10y + 27 + \frac{68y - 29}{y^2 - 3y + 1}$  (d)  $x^2 + xy$

2.19 (a)  $x^8 + x^4y^4 + y^8$ . Verificação:  $21(13) = 273$  (b)  $x^2 + y^2$ . Verificação:  $35/7 = 5$

# Capítulo 3

## Propriedades dos Números

---

### 3.1 CONJUNTOS DE NÚMEROS

O conjunto de números para contagem (ou naturais) é o conjunto: 1, 2, 3, 4, 5,....

O conjunto completo de números naturais é o dos números para contagem e o zero: 0, 1, 2, 3, 4,....

O conjunto dos inteiros é o dos naturais, o zero e os opostos dos naturais: ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...

O conjunto dos números reais é o de todos os números que correspondem aos pontos de uma reta numérica. Os reais podem ser separados em dois subconjuntos distintos: o dos números racionais e o dos números irracionais.

O conjunto dos números racionais é o dos reais que podem ser escritos na forma  $a/b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros e  $b$  não é zero. Os números racionais podem ser pensados como o conjunto dos inteiros e as frações de inteiros. Os números  $-4$ ,  $2/3$ ,  $50/7$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $10/5$ ,  $-1/2$ ,  $0$ ,  $145$  e  $15/1$  são exemplos de racionais.

O conjunto dos números irracionais é o dos reais que não são racionais. Os números  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt[4]{10}$ ,  $\sqrt{3} + 4$ ,  $\sqrt[3]{6} - 5$  e as constantes  $\pi$  e  $e$  são exemplos de números irracionais.\*

### 3.2 PROPRIEDADES

Um conjunto é fechado em relação a uma operação se o resultado obtido ao se aplicar a operação em dois elementos do conjunto também é um elemento do conjunto. O conjunto  $X$  é fechado em relação à operação  $*$  se, para quaisquer elementos  $a$  e  $b$  no conjunto  $X$ , o resultado  $a*b$  está em  $X$ .

Um conjunto possui um elemento neutro para uma operação quando existe um elemento no conjunto tal que qualquer outro combinado a ele permaneça inalterado. O conjunto  $X$  possui um elemento neutro para a operação  $*$  se existe um elemento  $j$  em  $X$  tal que  $j*a = a*j = a$  para todo  $a$  em  $X$ .

Um conjunto admite inversos em relação a uma operação se, para cada elemento no conjunto, existir outro tal que, quando combinados pela operação, resulta no elemento neutro. Se um conjunto não possui elemento neutro para uma operação, não poderá admitir inversos. Se  $X$  é um conjunto que possui elemento neutro  $j$  para a operação  $*$  então admite inversos se para cada  $a$  no conjunto  $X$  existir um elemento  $a'$  em  $X$  tal que  $a*a' = j$  e  $a'*a = j$ .

Conjuntos também podem obedecer as propriedades associativa e comutativa em relação a uma operação, como descrito na Seção 1.4. Se existem duas operações definidas no conjunto então elas podem satisfazer a propriedade distributiva também descrita na Seção 1.4.

**Exemplo 3.1** Quais propriedades são verdadeiras para os naturais, o conjunto completo dos naturais, os inteiros, os racionais, os irracionais e os reais com respeito à adição?

---

\* N. de R. T.: A constante  $e$  é introduzida no Capítulo 23.

+	Naturais	Naturais completo	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais
Fechamento	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Elemento neutro	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Inversos	Não	Não	Sim	Sim	Não	Sim
Associatividade	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Comutatividade	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

### 3.3 PROPRIEDADES ADICIONAIS

Existem algumas propriedades que os conjuntos numéricos possuem que não dependem de uma operação para serem verdadeiras. Três dessas propriedades são ordem, densidade e completude.

Um conjunto de números possui ordem se, dados dois elementos distintos no conjunto, um é maior que o outro.

Um conjunto é denso se entre quaisquer dois elementos dele existe outro elemento no conjunto.

Um conjunto numérico é completo se os pontos cujas coordenadas correspondem a seus elementos preenchem completamente uma reta ou um plano.

**Exemplo 3.2** Quais propriedades são verdadeiras para os naturais, o conjunto completo dos naturais, os inteiros, os racionais, os irracionais e os reais com respeito à adição?

	Naturais	Naturais completos	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais
Ordem	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Densidade	Não	Não	Não	Sim	Sim	Sim
Completude	Não	Não	Não	Não	Não	Sim

### Problemas Resolvidos

**3.1** Quais das propriedades de fechamento, elemento neutro e inversos o conjunto dos inteiros pares possui com respeito à adição?

#### Solução

Uma vez que os inteiros pares são da forma  $2n$ , onde  $n$  é um inteiro, sejam  $2m$  e  $2k$  dois inteiros pares. Sua soma é  $2m + 2k = 2(m + k)$ . Do exemplo 3.1 sabemos que  $m + k$  é um inteiro, pois  $m$  e  $k$  são inteiros. Assim,  $2(m + k)$  é 2 vezes um inteiro, logo é par, portanto  $2m + 2k$  é par. Consequentemente, o conjunto dos inteiros pares é fechado com respeito à adição.

Zero é um par inteiro, pois  $2(0) = 0$ . Como  $2m + 0 = 2m + 2(0) = 2(m + 0) = 2m$ , então 0 é o elemento neutro para os inteiros pares com respeito à adição.

Para o inteiro  $2m$ , o inverso é  $-2m$ . Como  $m$  é um inteiro,  $-m$  é um inteiro. Assim,  $-2m = 2(-m)$  é um inteiro par. Além disso,  $2m + (-2m) = 2(m + (-m)) = 2(0) = 0$ . Portanto, cada inteiro par admite um inverso.

**3.2** Dentre as propriedades de fechamento, elemento neutro, inversos, associatividade e comutatividade, quais são verdadeiras para a multiplicação nos conjuntos dos naturais, naturais completo, inteiros, racionais, irracionais e reais?

**Solução**

	Naturais	Naturais completo	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais
Fechamento	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Elemento neutro	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Inversos	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim
Associatividade	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Comutatividade	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

**3.3** Quais das propriedades de fechamento, elemento neutro e inversos o conjunto dos inteiros ímpares possui frente à multiplicação?

**Solução**

Já que os inteiros ímpares são da forma  $2n + 1$ , onde  $n$  é um inteiro, sejam  $2m + 1$  e  $2k + 1$  dois inteiros ímpares quaisquer. Seu produto é representado por  $(2m + 1)(2k + 1) = 4mk + 2m + 2k + 1 = 2(2mk + m + k) + 1$ . Como os inteiros são fechados com respeito à multiplicação e soma,  $(2mk + m + k)$  é um inteiro, logo o produto  $(2m + 1)(2k + 1)$  é igual a 2 vezes um inteiro mais 1. Assim, o produto é um inteiro ímpar. Portanto, o conjunto dos inteiros ímpares é fechado frente à multiplicação.

Um é inteiro ímpar, pois  $2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$ . Também temos  $(2m + 1)(1) = (2m)(1) + (1)(1) = 2m + 1$ , então 1 é o elemento neutro para a multiplicação de inteiros ímpares.

Sete é um inteiro ímpar, uma vez que  $2(3) + 1 = 7$ . Além disso,  $7(1/7) = 1$ , mas  $1/7$  não é um inteiro. Portanto, 7 não possui um inverso com respeito à multiplicação. Por existir pelo menos um inteiro ímpar que não possui inverso, o conjunto dos inteiros ímpares não admite inversos frente à multiplicação.

**3.4** O conjunto dos inteiros pares possui as propriedades de ordem, densidade e completude?

**Solução**

Dados dois inteiros pares distintos  $2m$  e  $2k$ , onde  $m$  e  $k$  são inteiros, sabemos que vale ou  $m > k$  ou  $k > m$ . Caso  $m > k$ , então  $2m > 2k$ , mas se  $k > m$  então  $2k > 2m$ . Assim, o conjunto dos inteiros pares possui ordem, já que para dois inteiros pares distintos  $2m$  e  $2k$ , temos ou  $2m > 2k$  ou  $2k > 2m$ .

Os números  $2m$  e  $2m + 2$  são inteiros pares. Não existe um inteiro par entre  $2m$  e  $2m + 2$ , pois  $2m + 2 = 2(m + 1)$  e não existe inteiro entre  $m$  e  $m + 1$ . Portanto, o conjunto dos inteiros pares não é denso.

Entre os inteiros pares 8 e 10, está o inteiro ímpar 9. Logo, os pares não representam coordenadas para todos os pontos da reta numérica. Consequentemente, o conjunto dos inteiros pares não é completo.

**3.5** Seja  $K = \{-1, 1\}$ . (a)  $K$  é fechado frente à multiplicação? (b)  $K$  possui um elemento neutro para multiplicação? (c)  $K$  admite inversos com respeito à multiplicação?

**Solução**

(a)  $(1)(1) = 1$ ,  $(-1)(-1) = 1$ ,  $(1)(-1) = -1$  e  $(-1)(1) = -1$ . Para todos os possíveis produtos de dois elementos em  $K$  o resultado está em  $K$ . Assim,  $K$  é fechado frente à multiplicação.

(b) 1 pertence a  $K$ ,  $(1)(1) = 1$  e  $(1)(-1) = -1$ . Assim, 1 é o elemento neutro da multiplicação em  $K$ .

(c) Como  $(1)(1) = 1$  e  $(-1)(-1) = 1$ , cada elemento de  $K$  é o seu próprio inverso.

### Problemas Complementares

- 3.6 Quais dentre as propriedades de fechamento, elemento neutro e inversos o conjunto dos inteiros pares possui com respeito à multiplicação?
- 3.7 Quais das propriedades fechamento, elemento neutro e inversos o conjunto dos inteiros ímpares possui com respeito à adição?
- 3.8 O conjunto dos inteiros ímpares possui ordem, é denso e completo?
- 3.9 Dentre as propriedades de fechamento, elemento neutro, inversos, associatividade e comutatividade, quais são verdadeiras para subtração nos conjuntos dos naturais, naturais completo, inteiros, racionais, irracionais e reais?
- 3.10 Dentre as propriedades de fechamento, elemento neutro, inversos, associatividade e comutatividade, quais são verdadeiras para divisão por números diferentes de zero, nos conjuntos dos naturais, naturais completo, inteiros, racionais, irracionais e reais?
- 3.11 Quais das propriedades de fechamento, elemento neutro, inversos, associatividade e comutatividade são verdadeiras para o conjunto do zero,  $\{0\}$ , frente à (a) adição, (b) subtração e (c) multiplicação?
- 3.12 Quais das propriedades de fechamento, elemento neutro, inversos, associatividade e comutatividade são verdadeiras para o conjunto do um,  $\{1\}$ , frente à (a) adição, (b) subtração, (c) multiplicação e (d) divisão?

### Respostas dos Problemas Complementares

- 3.6 Fechamento: sim; elemento neutro: não; inversos: não.
- 3.7 Fechamento: não; elemento neutro: não; inversos: não.
- 3.8 Ordem: sim; densidade: não; completo: não.

3.9	–	Naturais	Naturais completos	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais
	Fechamento	Não	Não	Sim	Sim	Não	Sim
	Elemento neutro	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Inversos	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Associatividade	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Comutatividade	Não	Não	Não	Não	Não	Não

3.10	÷	Naturais	Naturais completos	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais
	Fechamento	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim
	Elemento neutro	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Inversos	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Associatividade	Não	Não	Não	Não	Não	Não
	Comutatividade	Não	Não	Não	Não	Não	Não

3.11	Fechamento	Elemento neutro	Inversos	Associatividade	Comutatividade
(a) +	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
(b) -	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
(c) ·	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

3.12	Fechamento	Elemento neutro	Inversos	Associatividade	Comutatividade
(a) +	Não	Não	Não	Sim	Sim
(b) -	Não	Não	Não	Não	Sim
(c) ·	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
(d) ÷	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

# Capítulo 4

## Produtos Especiais

---

### 4.1 PRODUTOS ESPECIAIS

A seguir estão alguns dos produtos que aparecem com frequência em matemática e com os quais o estudante deve familiarizar-se o mais cedo possível. Demonstrações destes resultados podem ser obtidas efetuando-se as multiplicações.

- I. O produto entre um monômio e um binômio

$$a(c + d) = ac + ad$$

- II. O produto entre a soma e a diferença de dois termos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- III. O quadrado de um binômio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- IV. O produto de dois binômios

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

- V. O cubo de um binômio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- VI. O quadrado de um trinômio

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

## 4.2 PRODUTOS RESULTANDO EM RESPOSTAS DA FORMA $a^n \pm b^n$

Pode ser verificado realizando-se a multiplicação que

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$$

$$(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6$$

etc., sendo clara a regra. Estas equivalências podem ser sintetizadas em

$$\text{VII.} \quad (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n,$$

onde  $n$  é qualquer inteiro positivo (1, 2, 3, 4, ...).

Analogamente, pode-se verificar que

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$$

$$(a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7$$

etc., a regra sendo clara. Estas podem ser resumidas em

$$\text{VIII.} \quad (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n,$$

onde  $n$  é qualquer inteiro positivo ímpar (1, 3, 5, 7, ...).

### Problemas Resolvidos

- 4.1** (a)  $3x(2x + 3y) = (3x)(2x) + (3x)(3y) = 6x^2 + 9xy$ , usando I com  $a = 3x$ ,  $c = 2x$ ,  $d = 3y$ .  
 (b)  $x^2y(3x^3 - 2y + 4) = (x^2y)(3x^3) + (x^2y)(-2y) + (x^2y)(4) = 3x^5y - 2x^2y^2 + 4x^2y$   
 (c)  $(3x^3y^2 + 2xy - 5)(x^2y^3) = (3x^3y^2)(x^2y^3) + (2xy)(x^2y^3) + (-5)(x^2y^3)$   
 $= 3x^5y^5 + 2x^3y^4 - 5x^2y^3$   
 (d)  $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$ , usando II com  $a = 2x$ ,  $b = 3y$ .  
 (e)  $(1 - 5x^3)(1 + 5x^3) = (1)^2 - (5x^3)^2 = 1 - 25x^6$   
 (f)  $(5x + x^3y^2)(5x - x^3y^2) = (5x)^2 - (x^3y^2)^2 = 25x^2 - x^6y^4$   
 (g)  $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$ , usando III com  $a = 3x$ ,  $b = 5y$ .  
 (h)  $(x + 2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = x^2 + 4x + 4$   
 (i)  $(7x^2 - 2xy)^2 = (7x^2)^2 - 2(7x^2)(2xy) + (2xy)^2$   
 $= 49x^4 - 28x^3y + 4x^2y^2$ , usando III com  $a = 7x^2$ ,  $b = 2xy$ .  
 (j)  $(ax - 2by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(2by) + (2by)^2 = a^2x^2 - 4axby + 4b^2y^2$   
 (k)  $(x^4 + 6)^2 = (x^4)^2 + 2(x^4)(6) + (6)^2 = x^8 + 12x^4 + 36$   
 (l)  $(3y^2 - 2)^2 = (3y^2)^2 - 2(3y^2)(2) + (2)^2 = 9y^4 - 12y^2 + 4$   
 (m)  $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + (3)(5) = x^2 + 8x + 15$ , usando IV com  $a = 3$ ,  $b = 5$ .  
 (n)  $(x - 2)(x + 8) = x^2 + (-2 + 8)x + (-2)(8) = x^2 + 6x - 16$

- (o)  $(x + 2)(x - 8) = x^2 + (2 - 8)x + (2)(-8) = x^2 - 6x - 16$
- (p)  $(t^2 + 10)(t^2 - 12) = (t^2)^2 + (10 - 12)t^2 + (10)(-12) = t^4 - 2t^2 - 120$
- (q)  $(3x + 4)(2x - 3) = (3)(2)x^2 + [(3)(-3) + (4)(2)]x + (4)(-3)$   
 $= 6x^2 - x - 12$ , usando IV com  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d = -3$ .
- (r)  $(2x + 5)(4x - 1) = (2)(4)x^2 + [(2)(-1) + (5)(4)]x + (5)(-1) = 8x^2 + 18x - 5$
- (s)  $(3x + y)(4x - 2y) = (3x)(4x) + (y)(4x) + (3x)(-2y) + (y)(-2y)$   
 $= 12x^2 - 2xy - 2y^2$ , usando V com  $a = 3x$ ,  $b = y$ ,  $c = 4x$ ,  $d = -2y$ .
- (t)  $(3t^2s - 2)(4t - 3s) = (3t^2s)(4t) + (-2)(4t) + (3t^2s)(-3s) + (-2)(-3s)$   
 $= 12t^3s - 8t - 9t^2s^2 + 6s$
- (u)  $(3xy + 1)(2x^2 - 3y) = (3xy)(2x^2) + (3xy)(-3y) + (1)(2x^2) + (1)(-3y)$   
 $= 6x^3y - 9xy^2 + 2x^2 - 3y$
- (v)  $(x + y + 3)(x + y - 3) = (x + y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9$
- (w)  $(2x - y - 1)(2x - y + 1) = (2x - y)^2 - (1)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2 - 1$
- (x)  $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy)$   
 $= (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
- (y)  $(x^3 + 2 + xy)(x^3 - 2 + xy) = (x^3 + xy + 2)(x^3 + xy - 2)$   
 $= (x^3 + xy)^2 - 2^2 = x^6 + 2(x^3)(xy) + (xy)^2 - 4 = x^6 + 2x^4y + x^2y^2 - 4$

- 4.2** (a)  $(x + 2y)^3 = x^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$   
 $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ , usando V com  $a = x$ ,  $b = 2y$ .
- (b)  $(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 + (2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$
- (c)  $(2y - 5)^3 = (2y)^3 - 3(2y)^2(5) + 3(2y)(5)^2 - (5)^3$   
 $= 8y^3 - 60y^2 + 150y - 125$ , usando V com  $a = 2y$ ,  $b = 5$ .
- (d)  $(xy - 2)^3 = (xy)^3 - 3(xy)^2(2) + 3(xy)(2)^2 - (2)^3 = x^3y^3 - 6x^2y^2 + 12xy - 8$
- (e)  $(x^2y - y^2)^3 = (x^2y)^3 - 3(x^2y)^2(y^2) + 3(x^2y)(y^2)^2 - (y^2)^3 = x^6y^3 - 3x^4y^4 + 3x^2y^5 - y^6$
- (f)  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ , usando VII com  $a = x$ ,  $b = 1$ .

Se a forma não é familiar, multiplique como segue.

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

- (g)  $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - (2y)^3 = x^3 - 8y^3$ , usando VII com  $a = x$ ,  $b = 2y$ .
- (h)  $(xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4) = (xy)^3 + (2)^3 = x^3y^3 + 8$ , usando VIII com  $a = xy$ ,  $b = 2$ .
- (i)  $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$
- (j)  $(2x + 3y + z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(2x)(z) + 2(3y)(z)$   
 $= 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$ , usando VI com  $a = 2x$ ,  $b = 3y$ ,  $c = z$ .
- (k)  $(u^3 - v^2 + 2w)^2 = (u^3)^2 + (-v^2)^2 + (2w)^2 + 2(u^3)(-v^2) + 2(u^3)(2w) + 2(-v^2)(2w)$   
 $= u^6 + v^4 + 4w^2 - 2u^3v^2 + 4u^3w - 4v^2w$

- 4.3** (a)  $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^6 - 1$ , usando VII com  $a = x$ ,  $b = 1$ ,  $n = 6$ .
- (b)  $(x - 2y)(x^4 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4) = x^5 - (2y)^5$   
 $= x^5 - 32y^5$ , usando VII com  $a = x$ ,  $b = 2y$ .

$$(c) (3y + x)(81y^4 - 27y^3x + 9y^2x^2 - 3yx^3 + x^4) = (3y)^5 + x^5 \\ = 243y^5 + x^5, \text{ usando VIII com } a = 3y, b = x.$$

**4.4** (a)  $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)$ . Os primeiros dois fatores podem ser escritos como

$$(x + y + z)(x + y - z) = (x + y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2,$$

e os dois fatores seguintes como

$$(x - y + z)(x - y - z) = (x - y)^2 - z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - z^2.$$

O resultado fica

$$(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) = (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ = (x^2)^2 + (y^2)^2 + (-z^2)^2 + 2(x^2)(y^2) + 2(x^2)(-z^2) + 2(y^2)(-z^2) - 4x^2y^2 \\ = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$$

$$(b) (x + y + z + 1)^2 = [(x + y) + (z + 1)]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)(z + 1) + (z + 1)^2 \\ = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2x + 2yz + 2y + z^2 + 2z + 1$$

$$(c) (u - v)^3(u + v)^3 = [(u - v)(u + v)]^3 = (u^2 - v^2)^3 \\ = (u^2)^3 - 3(u^2)^2v^2 + 3(u^2)(v^2)^2 - (v^2)^3 = u^6 - 3u^4v^2 + 3u^2v^4 - v^6$$

$$(d) (x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2 = [(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)]^2 = [(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)]^2 \\ = [(x^2 + 1)^2 - x^2]^2 = [x^4 + 2x^2 + 1 - x^2]^2 = (x^4 + x^2 + 1)^2 \\ = (x^4)^2 + (x^2)^2 + 1^2 + 2(x^4)(x^2) + 2(x^4)(1) + 2(x^2)(1) \\ = x^8 + x^4 + 1 + 2x^6 + 2x^4 + 2x^2 = x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(e) (e^y + 1)(e^y - 1)(e^{2y} + 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1) = (e^{2y} - 1)(e^{2y} + 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1) \\ = (e^{4y} - 1)(e^{4y} + 1)(e^{8y} + 1) = (e^{8y} - 1)(e^{8y} + 1) = e^{16y} - 1$$

### Problemas Complementares

Obtenha cada relação a seguir.

- 4.5** (a)  $2xy(3x^2y - 4y^3) = 6x^3y^2 - 8xy^4$   
 (b)  $3x^2y^3(2xy - x - 2y) = 6x^3y^4 - 3x^3y^3 - 6x^2y^4$   
 (c)  $(2st^3 - 4rs^2 + 3s^3t)(5rst^2) = 10rs^2t^5 - 20r^2s^3t^2 + 15rs^4t^3$   
 (d)  $(3a + 5b)(3a - 5b) = 9a^2 - 25b^2$   
 (e)  $(5xy + 4)(5xy - 4) = 25x^2y^2 - 16$   
 (f)  $(2 - 5y^2)(2 + 5y^2) = 4 - 25y^4$   
 (g)  $(3a + 5a^2b)(3a - 5a^2b) = 9a^2 - 25a^4b^2$   
 (h)  $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$   
 (i)  $(y + 3x)^2 = y^2 + 6xy + 9x^2$   
 (j)  $(z - 4)^2 = z^2 - 8z + 16$   
 (k)  $(3 - 2x^2)^2 = 9 - 12x^2 + 4x^4$   
 (l)  $(x^2y - 2z)^2 = x^4y^2 - 4x^2yz + 4z^2$   
 (m)  $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$   
 (n)  $(x - 4)(x + 7) = x^2 + 3x - 28$   
 (o)  $(y + 3)(y - 5) = y^2 - 2y - 15$