Reflexões gerais sobre o ensino da matemática

1

Mabel Panizza

INTRODUÇÃO

As pesquisas didáticas e as preocupações atuais dos professores expressam claramente uma problemática central: não é possível tratar o tema da aprendizagem e o ensino da matemática sem se referir seriamente à questão do sentido. Os capítulos deste livro abordam diversas dimensões deste problema complexo: as análises das situações didáticas que se apresentam, das formas de organização da sala de aula, das intervenções docentes, etc., fazendo referência a diversas acepções da noção de sentido, às condições adequadas para sua aquisição e aos seus aspectos constitutivos. Neste capítulo introdutório, apresento uma visão de questões gerais abrangentes dessas dimensões através do desenvolvimento de um eixo fundamental do ensino da matemática: o eixo das relações entre objetos de conhecimento e representações, articulado com o eixo da aquisição do sentido na matemática. Trata-se de dois aspectos importantes para uma didática que leve em conta tanto a especificidade do nível em que se desenvolve o ensino como as aprendizagens que devem ser atingidas a longo prazo por meio dos diferentes níveis de escolaridade.

SOBRE A NOÇÃO DE SENTIDO

> Poucos conceitos deram tantos problemas aos filósofos como o conceito de sentido. Apesar de numerosas tentativas para enquadrá-lo dentro de teorias, essa noção parece, afinal, sempre lhes escapar. Isso proviria de que toda teoria propondo-se tratar o sentido em geral se refere, necessariamente, a ela mesma: qualquer definição da noção de "sentido" tem ela mesma um sentido. Conseqüentemente, poucos filósofos trataram de considerar o sentido em toda sua generalidade; a maioria interessou-se preferentemente no sentido de diferentes coisas e se dedicou a diversos aspectos do sentido.
>
> Sierpinska, 1995.

A palavra "sentido" parece estar cada vez mais presente nas preocupações dos professores sobre o ensino da matemática. "Como conseguir que os alunos encontrem *o sentido* da atividade matemática?", "Os alunos agem mecanicamente sem dar *sentido* ao que fazem", entre outras, são expressões habituais dos professores. A palavra "sentido" parece explicar intenções, conquistas e frustrações. No entanto, questões como qual significado se atribui à palavra, onde se encontra o sentido, se é algo que o docente *dá* ou o aluno *constrói* e em que condições, longe de serem claras e compartilhadas, comportam profundas diferenças e contradições.

Se com a palavra "sentido" se tenta iluminar fenômenos e processos de aprendizagem e de ensino e incorporar o termo coerentemente à linguagem dos educadores, é importante reconhecer a necessidade de ultrapassar o significado comum do termo em castelhano. A questão não é simples. Talvez uma boa forma de começar seja

– à maneira dos filósofos – deixar de considerar o sentido em geral e perguntar-se por seus diferentes aspectos.

Como observa Drouhard (1995) ao analisar as diferentes acepções da palavra "sentido" utilizadas pelos didatas da escola francesa:

> [...] os diversos autores utilizam a palavra ["sentido"] com acepções extremamente diferentes. Para caracterizá-las, deve-se notar que a palavra "sentido" não intervém isoladamente, mas, em geral, acompanhada por outra palavra: "conceito", "atividade", "conhecimento", "saber", "escrita", etc. Devemos, então, fazer-nos cada vez a pergunta: "sentido de *quê*?".

Efetivamente, Brousseau (1983) define o sentido de um conhecimento. Vergnaud (1991), o sentido de um conceito; Duval (1995) define os diferentes componentes do sentido de uma proposição – dentro do arco mais amplo das representações semióticas, discursivas e não-discursivas –; Laborde (1991) identifica elementos constitutivos do sentido de um problema; etc. Neste livro, consideraremos algumas dessas definições e as de outros autores,[1] e as iremos introduzindo nos parágrafos seguintes e em outros capítulos, em momentos oportunos relacionados a diversas dimensões da aquisição do sentido na matemática. A intenção deste parágrafo não é a de tratar o problema do sentido em profundidade, mas a de abrir a problemática e convidar a reter duas idéias principais: ao falar do sentido, procuraremos precisar cada vez o "sentido de quê" e identificar seus aspectos constitutivos. É importante que também o leitor centre sua atenção nesses aspectos cada vez que se encontre com a palavra "sentido" nesta obra.

OBJETOS DE CONHECIMENTO E REPRESENTAÇÕES: PRIMEIRA ABORDAGEM

> Diante da pergunta "O número 18/3 é inteiro?", João (17 anos) responde: "Não! É um número racional, porque é um quociente de dois inteiros".

João sabe reconhecer um número racional em sua expressão fracionária. A escrita, no entanto, parece inibir-lhe a capacidade de ver que 18/3 não somente é um número racional, mas que, além disso, é um número inteiro (porque 18/3 é igual a 6). O caso de João – que confunde o número com sua representação (fracionária), que atribui ao número uma propriedade da notação utilizada para descrevê-lo – é representativo do que acontece com a maioria dos alunos que terminam o ensino médio. Em termos mais gerais, trata-se de uma *primazia da forma sobre o conteúdo* que produz uma identificação do *objeto de conhecimento com sua representação*.

Em 1891, Frege dizia:

> A inclinação bastante difundida atualmente de não reconhecer como objeto o que não pode ser perceptível com os sentidos induz a tomar os sinais numéricos pelos números [...] (Frege, 1974).

A idéia expressa com tanta clareza é fecunda em relação à matemática em geral, uma vez que os objetos matemáticos, por sua natureza, não são perceptíveis mediante os sentidos: o numeral "2" não é número 2, mas a representação deste; um desenho de um quadrado é uma das infinitas representações do quadrado como objeto geométrico ideal, etc. Trata-se de um problema sem dúvida importante na hora de ensinar matemática. Deve-se ter presente que, de um lado, estão os conceitos, as propriedades dos *objetos matemáticos*, e, do outro lado, as *representações* que são utilizadas em matemática. Tendo presente esta particularidade, observada por Frege, quais questões deveriam ser apresentadas sobre esses aspectos e suas relações?

Em primeiro lugar, para tratar deste problema de relações entre objetos e representações é preciso questionar a noção mesma de representação. Trata-se de uma noção que costuma estar presente, mas, em geral, de maneira confusa nas reflexões sobre o tema, e, evidentemente, é fundamental. A propósito, Duval (1993) se pergunta em quais condições um numeral ou um desenho, por exemplo, funcionam como representações dos objetos matemáticos correspondentes (número e figura, respectivamente) e afirma:

> [...] é necessário que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma delas. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, isto é, que ela proporciona o acesso ao objeto representado.

A dificuldade de conseguir a primeira das condições estabelecidas por Duval, "que o objeto não seja confundido com suas representações", é aquilo a que Frege já havia feito referência – no domínio numérico – ao falar da tendência de tomar os sinais numéricos pelos números. Trata-se de uma condição especialmente difícil de se verificar quando se trabalha na matemática, em virtude de que, como já observamos, os objetos matemáticos não são perceptíveis através dos sentidos.

A segunda condição – não menos difícil de se verificar – estabelece que o objeto deve ser "reconhecido em cada uma de suas representações". Assim, por exemplo, é necessário que, ao terminar a escolaridade, um aluno possa reconhecer o número 6, não somente no numeral "6", mas também nas expressões "18/3", "4 + 2", "5 + 1" ou "2 x 3". João, por exemplo, não reconhece o número 6 na expressão "18/3", tanto que afirma que "18/3" não é um número inteiro.

O cumprimento dessas duas condições por parte dos alunos é uma das primeiras questões a serem propostas como objetivo a longo prazo, e requer atividades específicas de ensino. Para trabalhar nessa perspectiva, é fundamental, em primeiro lugar, que o professor se aprofunde em sua própria capacidade de diferenciar os objetos matemáticos de suas representações e que compreenda as condições sob as quais uma representação funciona como tal. Assim mesmo, é importante que identifique nos procedimentos e representações que os alunos utilizam diversas maneiras de tratamento e de conhecimento dos objetos e suas representações.

Objetos matemáticos de representações usadas pelos alunos

Em primeiro lugar, é importante reconhecer que muitos procedimentos das crianças indicam que elas – implicitamente – são capazes de reconhecer muito cedo os objetos matemáticos em algumas de suas diversas representações. Para isso, nos basearemos em uma primeira acepção da palavra "sentido", que devemos a Frege (sentido de uma expressão), a qual serve para interpretar os procedimentos dos alunos.

Frege, em 1892, para perceber que diversas expressões (em nosso exemplo: "18/3", "4 + 2", "5 + 1" ou 2 x 3") correspondem a diversas interpretações e perspectivas do mesmo objeto (6), introduz uma diferença fundamental ao postular que as expressões têm uma *referência* (em alemão: *Bedeutung*, traduzido também por "significado", ou "denotação") e, além disso, um *sentido* (em alemão: *sinn*) (Frege, 1974).

A "referência" (ou significado, ou denotação) de uma expressão é o objeto que a expressão designa, enquanto o "sentido" leva em conta a *maneira* pela qual a expressão designa o objeto. De acordo com esta distinção, "18/3", "4 + 2", "5 + 1" ou 2 x 3" significam (ou *denotam*, ou *designam*) o mesmo número, o 6, mas têm *sentidos diferentes,* uma vez que são maneiras diferentes de obter esse número.

Da mesma maneira, "3 + 42", "42 + 3", "10 + 10 + 10 + 10 + 3 + 2" significam (ou denotam, ou designam) o mesmo número, o 45, mas têm *sentidos diferentes*.

Por que dizemos que esta distinção entre "sentido" e "significado" permite interpretar trabalhos dos alunos que os professores observam em sua prática diária? Vejamos um primeiro exemplo. Todos sabemos do procedimento das crianças, quando, para calcular "3 + 42" dizem: "43, 44, 45". Elas – nesse caso –, fazem um cálculo, "deixando o 42 na cabeça". Esse procedimento leva implícitas duas questões fundamentais:

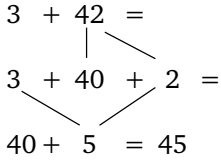
- O reconhecimento de que "3 + 42" e "42 + 3" são duas *formas diferentes* de reconhecer o resultado; segundo Frege, "3 + 42" e "42 + 3" designam o mesmo número (o 45);
- A *escolha* de uma das duas formas para efetuar a operação (mudança de "sentido", segundo Frege).

Naturalmente, para algumas crianças, as que dominam os algoritmos convencionais ou outros intermediários, os cálculos "3 + 42" e "42 + 3" têm a mesma complexidade. Mas, para o caso que analisamos, na capacidade para "escolher mudar de sentido" (isto é, a maneira de calcular) reside a *possibilidade* de realizar a operação. De fato, "pôr o 3 na cabeça" e efetuar cálculo, sabemos que é muito difícil ou até impraticável para os menores.

Vemos, então, que, embora a expressão "3 + 42" sugira um "sentido", uma maneira de calcular a soma, essas crianças escolhem mudar de expressão até chegar a alguma coisa cujo "sentido" (segundo Frege) lhes sugere uma maneira fácil (ou possível) de realizar a operação. Essa mudança de expressão é significativa, enquanto lhes permite resolver o problema com os recursos dos quais podem dispor.

Notemos também que essa inversão se baseia em uma *propriedade das operações* (a comutatividade da soma) e *não depende do sistema de numeração* utilizado (sistema decimal, romano ou outro). Quer dizer que esta primeira forma que analisamos de calcular a soma utiliza uma propriedade do objeto de conhecimento e independente de sua representação.

Vejamos outro exemplo. Quando, para calcular esta mesma soma "3 + 42", as crianças fazem:



também estão utilizando diferentes maneiras de designar o número 45. Desta vez, o procedimento utilizado – seja ou não por escrito – baseia-se em propriedades dos números e das operações e também na decomposição aditiva, propriedade do sistema de numeração decimal. Quer dizer que essa segunda forma de calcular a soma utiliza propriedades do objeto de conhecimento e propriedades específicas de sua representação.

Quando comparamos ambos os procedimentos, vemos que, embora o modo de produção do cálculo seja diferente, conforme o tratamento dos símbolos se realiza por escrito ou internamente ("mentalmente"), ambos os mecanismos se baseiam em uma "escolha": mudar de "sentido" (segundo Frege) para poder fazer a operação. O que é importante ver nesses procedimentos é que, de maneira implícita ou explícita, sem suporte exterior ou com suporte nos dedos ou por escrito, desde as primeiras aprendizagens as crianças utilizam *diversas representações de um mesmo objeto* para fazer operações numéricas e "o reconhecem (pelo menos implicitamente) em cada uma delas". Por que razão, mais adiante, perdem essa capacidade e – como João – identificam o *objeto* com a *representação*, o *conteúdo* com a *forma*?

A resposta para essa pergunta necessariamente contém considerações sobre múltiplos aspectos do ensino e da aprendizagem, algumas das quais abordaremos neste capítulo. Um desses aspectos, que desenvolveremos a seguir, consiste em compreender que esses trabalhos que analisamos são manifestações de uma *maneira de conhecer* dos alunos e, conseqüentemente, compete à responsabilidade didática fazê-las evoluir.

Interpretação dos trabalhos dos alunos em termos de conhecimentos

A tradição escolar não reconhece as representações utilizadas pelos alunos desde o início da escolaridade como indicativas de uma *maneira* de conhecer os objetos e as representações formais (em relação com o exemplo que vimos desenvolvendo, maneira de conhecer os números [objeto] e o sistema de numeração [representação]). Conseqüentemente, as propostas didáticas – embora reconhecendo a importância de "partir daquilo que as crianças já sabem" – não acertam orientar uma evolução desses conhecimentos.

Acontece que este princípio geral de enunciado fácil ("partir do que as crianças já sabem") exige, naturalmente, ter conhecimento sobre o que elas sabem, e isso não é tão fácil como parece.

Ao analisar, por exemplo, os procedimentos dos alunos apresentados no item anterior, o leitor poderia se perguntar: "Mas, então, as crianças já *sabem* as propriedades associativa e comutativa da soma?". E, naturalmente, se responderia que não é possível pensar que as crianças dessas idades conhecem as propriedades de modo a poder enunciá-las, nem que isso seja objeto de ensino nesses primeiros níveis de escolaridade. No entanto, como vimos, essas propriedades dos números *funcionam de maneira implícita* nos procedimentos analisados, o que se manifesta pelo uso de *expressões diferentes* do *mesmo número*. Isto significa um *conhecimento* por parte dos alunos?

Para responder a esta pergunta, é especialmente útil a noção de "teorema em ato" de Vergnaud (1996), que percebe alguns conhecimentos matemáticos implícitos que os alunos utilizam na ação:

> Um teorema em ato é uma proposição que é considerada como verdadeira por um sujeito individual para uma certa categoria de situações variáveis.

De acordo com essa definição, os procedimentos analisados anteriormente são indicativos de que os alunos *conhecem "em ato"* as propriedades comutativa e associativa da soma para as quantidades utilizadas. Em outras palavras, para esses alunos, o cálculo da soma com as quantidades consideradas está dentro da "categoria de situações variáveis" em que essas propriedades são concebidas como verdadeiras por eles. Quando o professor pode reconhecer esses conhecimentos em ato nos alunos, ele começa a visualizar o papel fundamental que possuem no processo de aprendizagem dos conceitos, dos algoritmos e das representações convencionais. Conseqüentemente, começa também a estar em condições de "partir desses conhecimentos" e de planejar intencionalmente oportunidades para que os alunos mostrem representações e procedimentos não-convencionais, estabeleçam a validade dos mesmos, analisem os que são pertinentes, abandonem uns, escolham outros.

Isso nos leva a retomar o problema do sentido em relação com o lugar que ocupam esses processos na aprendizagem de conceitos e representações formais em uma perspectiva construtivista da aprendizagem. É o momento oportuno para reconhecer, no valor que damos a este tipo de processos, o marco orientador que devemos a Brousseau (1983), para quem o *sentido de um conhecimento* se define

> [...] não somente pelo conjunto de situações em que este conhecimento é realizado como teoria matemática, não somente pelo conjunto de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura fazer, de formulações que retoma, etc. (citado por Charnay, 1994a).

Os processos antes mencionados são – de acordo com essa definição – *parte constitutiva do sentido dos conhecimentos*. Um ensino da matemática que se situe em uma perspectiva construtivista deve favorecer espaços para esses processos. Uma condição necessária, embora não suficiente, para uma tal perspectiva didática é a possibilidade de reconhecer nos alunos diversas maneiras de conhecer (implícitas, conscientes, explícitas) relacionadas com um saber matemático, e considerá-las constitutivas do sentido dos conhecimentos que constroem.

Primeiras conclusões para o ensino da matemática

A análise feita até aqui contém elementos de três aspectos que a pesquisa cognitiva e didática identificou de maneira quase simultânea e em paralelo, fundamentais para abordar o problema da aquisição do sentido na matemática: a existência de diversas maneiras de conhecer (implícitas, conscientes, explícitas), o reconhecimento – em termos de hipótese – sobre o que e como os alunos conhecem a partir dos procedimentos e representações que utilizam, a identificação do uso de procedimentos e representações não-convencionais e de sua evolução na construção do conhecimento.[2] Na escola, os resultados dessas pesquisas começaram a se manifestar, mas com graus diferentes de importância.

Nos últimos anos, por exemplo, a escola está reconhecendo a importância de permitir que os alunos apresentem procedimentos não-convencionais em contraposição com a postura mais tradicional, que pretendia ensinar diretamente os procedimentos formais. Ao considerá-los como constitutivos do saber formal, promovem-se práticas para que aqueles procedimentos aconteçam na sala de aula, para que apareçam, sejam analisados, etc., antes de ensinar os algoritmos convencionais, os que contêm – sem dúvida – todo o saber, mas que não o "mostram" a quem está construindo essas noções. Mesmo assim, não se considera esta exibição de procedimentos não-convencionais somente por seu caráter de anterioridade em relação aos procedimentos formais, mas pela coexistência de ambos os tipos de procedimentos suscitar interesse, por exemplo, pelo valor que possuem os primeiros como meios de controle dos segundos.

Não acontece a mesma coisa com o lugar atribuído às representações não-convencionais. Efetivamente, embora os procedimentos dos alunos comportem naturalmente representações (particularmente, não se deve esquecer de que a expressão verbal é uma forma de representação), e embora seja bem-reconhecida a importância da representação na matemática, a tradição escolar veio retardando a reflexão sobre este ponto. Assim como se veio reconsiderando o lugar dos procedimentos não-convencionais em relação com os formais, deve-se rever a postura tradicional que ignora o valor do uso de representações não-convencionais na aquisição do conhecimento matemático. Para isso, é necessário começar a identificar os *aspectos específicos da aprendizagem e do ensino* que um olhar sobre as representações pode ajudar a iluminar. Até aqui, tocamos em três questões fundamentais sobre este ponto que sintetizamos em termos de saberes necessários por parte do professor:

- distinguir conceitualmente os objetos de conhecimento e suas representações;
- compreender as condições sob as quais uma representação funciona como tal;
- reconhecer as diversas representações que os alunos utilizam como uma maneira de conhecer, constitutiva dos conhecimentos que constroem.

Analisaremos, nos itens a seguir, outros quatro aspectos relevantes: as diversas funções que as representações desempenham para os alunos, a existência de conhecimentos matemáticos que não estão implicados nas operações sobre os símbolos, a complexidade cognitiva que supõe a interpretação de representações e a necessidade de rever as concepções de aprendizagem e de ensino que estão por trás das práticas atuais com relação aos sistemas simbólicos. Embora a análise desses aspectos não esgote o tratamento do tema, é, ao menos, um bom começo que permitirá agregar novas conclusões às tiradas até o momento. O capítulo é concluído com um conjunto de saberes necessários para o professor que deve conduzir um ensino que se proponha à construção do sentido dos conhecimentos por parte dos alunos.

DIVERSAS FUNÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES PARA OS ALUNOS

> *Aníbal, 7 anos (depois de resolver um problema): "Mamãe, os problemas de divisão precisam de 'planejamento'?"*[3]

O famoso "planejamento" foi sempre considerado necessário para resolver os problemas; mais ainda, o planejamento escrito no caderno funciona como indicador de que o aluno pensou e raciocinou, e sua falta, como indicador do contrário. O exemplo de Aníbal mostra que nenhuma dessas coisas funciona necessariamente assim para os alunos. Por um lado, para ele, o planejamento (convencional) é algo que alguém *deve* colocar, antes ou depois de resolver o problema, embora não tenha sido um instrumento de raciocínio para guiar a resolução (os problemas de divisão precisam de planejamento?). Por outro lado, possivelmente ele utilizou alguma outra organização escrita dos dados (uma espécie de "planejamento pessoal") para resolver o problema, que talvez tenha ficado em uma folha de rascunho, porque a

prática escolar não lhe "ensinou" que seria importante comunicá-lo.

Como vimos sobre outras tarefas, as crianças utilizam representações durante *o mesmo processo de resolução* de um problema, representações que as ajudam a pensar, a lembrar, a guardar informação, a calcular, etc. Nesses casos, as representações são um meio para a resolução do problema e desempenham funções diferentes da função de *comunicação para outros* de algo pensado anteriormente.

As diversas funções da linguagem e das representações simbólicas na atividade matemática (para comunicar aos outros ou a si mesmo, como ajuda para o pensamento, como apoio para o cálculo, para o planejamento e para o controle, etc.) foram teorizadas por Vergnaud (1991) e por Duval (1995). Vergnaud (1996), particularmente, incorpora algumas delas explicitamente em sua teoria dos campos conceituais, pelo valor que lhes confere na atividade matemática.

Para Duval (1993, 1995), um ponto crucial para a aprendizagem da matemática diz respeito ao trabalho com diversos sistemas de representação, pois é assim que se consegue que uma representação funcione como tal, de acordo com a condição que o autor estabeleceu e que analisamos anteriormente (que o aluno não confunda o objeto com nenhuma de suas representações e que o reconheça em cada uma delas).[4]

Essas considerações trazem ainda mais argumentos a favor da necessidade de facilitar espaços de emergência das representações não-convencionais dos alunos, enquanto sustentam a hipótese de que as representações externas têm um *valor produtivo* na aprendizagem. Sugerem também a necessidade de rever algumas tradições escolares, em virtude das conseqüências que comportam para a aprendizagem ao estarem ancoradas em visões mais restritas sobre as funções da linguagem e das representações simbólicas.

A primeira revisão deveria ser sobre o critério segundo o qual – especialmente na educação infantil e nas séries iniciais – as atividades dos alunos devem passar necessariamente e de maneira ordenada por etapas de *ação efetiva, representação gráfica e representação simbólica*.[5] Essa seqüência deixa lugar a um só aspecto – certamente importantíssimo – das representações externas relacionadas com a atividade matemática: a função de representação como comunicação (para os outros), como maneira de tornar público e deixar expresso o que já se fez anteriormente. Contudo, esta subordinação do simbólico à ação não dá lugar ao uso das representações simbólicas encerradas no mesmo processo de resolução de problemas – que começa com a representação do problema em si mesmo (organização dos dados e da meta, etc.) [6] – e que, como vimos, desempenham diversas funções importantes na atividade matemática.

Rever esta tradição não significa interpretar que estamos sugerindo inverter a ordem, isto é, começar pelo simbólico para continuar com o concreto. Na realidade, trata-se justamente de compreender que não se deve estabelecer um critério único e independente da situação particular de ensino. Por exemplo, ao trabalhar com conjuntos na educação infantil e na 1ª série, em alguns casos, será oportuno começar com conjuntos reais; em outros, com conjuntos desenhadas. O professor deve analisar a conveniência de uma ou de outra modalidade em cada caso, devendo, entre outros saberes, ter identificadas as diversas funções que as representações podem desempenhar para os alunos quando trabalham na matemática.

Outra questão que deve ser revista – especialmente em relação com os primeiros anos do ensino fundamental – é a tradição[7] segundo a qual o planejamento é ensinado pelo professor como a maneira de pensar um problema. Embora o planejamento convencional tenha sido criado com a intenção de oferecer um meio para a resolução dos problemas, mediante este tipo de prática os alunos não encontram espaços para usar outras representações que lhes sejam significativas para cada problema e, por conseguinte, importantes para pensar e resolver.

Não estamos, de forma alguma, sugerindo eliminar o planejamento na resolução de problemas. Ao contrário, trata-se de restituir a função para a qual foi criado, favorecendo que

os alunos exibam e registrem em seus cadernos seus "planejamentos pessoais", esses que, como no caso de Aníbal que analisamos, são os que efetivamente os ajudam no processo de resolução.

É importante destacar que os processos exibidos mediante o uso das diversas funções das representações constituem tanto o sentido dos conhecimentos que os alunos constroem dos *objetos matemáticos* como o dos conhecimentos que constroem dos *sistemas de representação*.

PROBLEMAS E CONTAS: UMA FALSA DIFERENÇA?

Por que tratar esta questão? Porque, a uma longa tradição escolar que propunha aos alunos grandes quantidades de contas, seguiu-se uma nova corrente baseada na resolução de problemas. Em que sentido essa nova corrente deveria significar uma evolução na didática? Neste item responderemos a essa pergunta em termos dos conhecimentos necessários para se resolver um problema ou uma conta. Particularmente, veremos que há conhecimentos que não são necessários para *efetuar* uma operação, mas são necessários para a *escolha*[8] da operação que permitirá resolver o problema.

Esta análise é fundamental para que uma prática baseada na resolução de problemas signifique uma verdadeira evolução em relação às práticas baseadas em contas: trata-se de identificar os diversos conhecimentos matemáticos que os alunos poderão construir em cada caso. Analisaremos essa questão mediante o seguinte problema de adição:

> Nesta caixa tenho 3 bolinhas e nesta outra, 42. Quantas bolinhas tenho ao todo?

Que conhecimentos são necessários para resolvê-lo? Em primeiro lugar, é necessário ter presente dois aspectos *distintos* comprometidos na resolução. Trata-se de:

1. Encontrar que "3 + 42" é a *operação numérica* adequada para resolver o problema.
2. Calcular a soma.

O fato de que se trata de aspectos distintos é bem expresso por Vergnaud (1991). Efetivamente, conforme expõe, como exemplo, em sua definição de *sentido de um conceito* – que apresentamos em seguida –, *ambos* os aspectos são constitutivos do *sentido* da adição.

> São as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas situações mesmas. Também não está nas palavras ou nos símbolos matemáticos. Diz-se, no entanto, que uma representação simbólica, que uma palavra ou um enunciado matemático têm sentido, ou vários sentidos, ou não têm sentido para tais ou quais indivíduos; diz-se também que uma situação tem sentido ou não tem sentido. Então, o que é o sentido?
> O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, são os esquemas evocados no sujeito individual por uma relação ou por um significante que constituem o sentido desta situação ou deste significante para este indivíduo. São os esquemas, isto é, os comportamentos e sua organização. *O sentido da adição para um sujeito individual é o conjunto de esquemas que pode ser colocado em prática para tratar as situações que são enfrentadas e que implicam a idéia de adição, é também o conjunto de esquemas que pode ser colocado em prática para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e da linguagem que representam a adição.* (O itálico é nosso.)

Quando a professora intervém na escolha da operação adequada, respondendo afirmativamente a pergunta tão conhecida: "O sinal, é de mais?", podemos dizer que as crianças resolvem a conta, mas não o *problema*. Embora para eles o cálculo em si mesmo represente também *um* problema, podemos dizer que, nesse caso, o problema enunciado pela professora não é aquele que resolveram. Algo semelhante acontece quando o enunciado *sugere*[9] que se trata de uma soma. Em ambos os casos, "mataram" o problema, o problema foi reduzido à resolução da conta. Os alunos não precisaram colocar em prática todos os conhecimentos necessários para tratar a situação.

Trata-se, certamente, de coisas distintas. Contudo, quais são os conhecimentos necessários para abordar cada um desses aspectos?

Já nos referimos aos conhecimentos envolvidos em alguns procedimentos dos alunos para efetuar a *operação de soma*. Analisamos os conhecimentos em termos das propriedades das operações (associativa e comutativa da soma) e em termos de propriedades específicas do sistema de numeração (decomposição aditiva) colocadas em prática nos procedimentos. Quanto ao conhecimento envolvido na *escolha da operação*, trata-se do aspecto cardinal do número, em relação com a adição de quantidades. Novamente, Vergnaud (1991) nos ajuda a compreender, do lado do sujeito que resolve o problema, o conhecimento – seguramente implícito – necessário para fazer essa escolha. Vergnaud descreve – em termos do teorema em ato – o conhecimento dos alunos em uma situação na qual poderiam contar o total dos elementos do conjunto (porque se trata de conjuntos disponíveis) e, no entanto, fazem o cálculo:

> [...] entre os 5 e os 7 anos, as crianças descobrem que não é necessário contar o total para encontrar o cardinal de A ∪ B se já se contou o cardinal de A e o de B. alguém pode expressar este conhecimento por um teorema em ato:
>
> card (A ∪ B) = card A + card B (se A e B são distintos).
>
> A ausência de quantificador deixa entender que este teorema não tem uma validade universal para as crianças, mas um alcance local, para pequenos conjuntos, por exemplo.

É importante notar que esse teorema em ato é também pertinente para descrever o conhecimento envolvido na escolha da operação no caso do problema que estamos analisando, em que os conjuntos não estão disponíveis.

Talvez valha a pena reformular o que Vergnaud destaca sobre "a ausência de quantificador universal". Em outras palavras, ele se refere a alguma coisa que é bem conhecida pelo professor: o fato de que, por exemplo, para pequenos conjuntos, as crianças somam os dois cardinais, mas, para grandes conjuntos, precisam reuni-los e contar o total. O alcance do teorema em ato enunciado é, então, para esses pequenos conjuntos para os quais as crianças somam os cardinais.

Em síntese, toda essa discussão pode situar-se novamente dentro da análise que vínhamos fazendo – em termos de objetos e representações. O conhecimento identificado por Vergnaud nos alunos nessas situações expressa uma propriedade do número (objeto) e não depende do sistema de representação (sistema de numeração decimal, romano ou outro) utilizado para efetuar o cálculo.

O cálculo da soma, *por si só*, não põe em prática esse conhecimento (relativo ao aspecto cardinal do número), embora aí intervenham no mesmo – como vimos – outros conhecimentos do objeto (propriedades das operações).

Naturalmente, isto não é alguma coisa que o professor deve *dizer* aos alunos. Trata-se, sim, de algo que ele deve saber para abordar no trabalho didático. É fundamental avaliar a distância entre os aspectos assinalados em relação com o problema – a operação como *recurso* para resolvê-lo, e *fazer a conta* – do ponto de vista do saber matemático e, conseqüentemente, dos conhecimentos que devem ser construídos pelos alunos ao resolver o problema. Somente essa compreensão coloca o professor na possibilidade de escolher, e não somente de abandonar velhas práticas pelo simples fato de que as novas correntes sugerem outra coisa. Aceitar como lei formulações do tipo "Agora não há mais exercícios na sala de aula, deve-se formular situações-problema" que pode levar, sem uma compreensão adequada, a práticas educativas que signifiquem por parte dos alunos a resolução de "exercícios disfarçados de problemas".

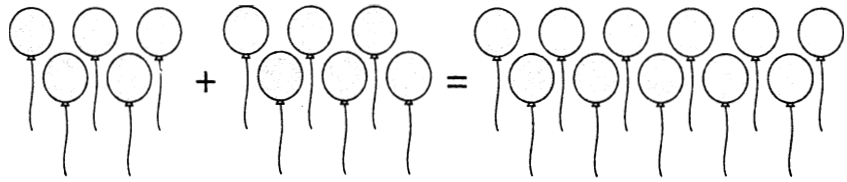
USOS (E ABUSOS) DAS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS

Abordaremos, agora, um conjunto de fenômenos complementares aos analisados nos itens anteriores, desta vez em relação com a *complexidade cognitiva envolvida* no uso de representações.

Quando o professor apresenta um problema, o modo de interpretar – por parte dos alunos – a representação utilizada na *formu-*

lação deste é parte da tarefa e condiciona a resolução. O professor, seguramente, está consciente disso. No entanto, a apresentação de atividades freqüentemente parece subestimar a complexidade de interpretação de um gráfico, um esquema, uma escrita numérica, como se naturalmente o aluno "visse" na representação mesmo que o professor "vê". Esta ilusão de transparência entre aquilo que "se mostra" e o objeto ou relação representados é mais pronunciada quanto mais "perto do concreto" se encontra a representação utilizada.

Um bom exemplo disso é analisado por Moreno (ver Capítulo 3, deste livro), em relação a uma adição de quantidades representada mediante o seguinte esquema:



Moreno discute vários dos problemas que comportam este tipo de representações ao serem interpretadas pelos alunos. É importante acrescentar que os sinais "+" e "=", que são pertinentes para as operações de numerais, não o são neste contexto. A esta falta de pertinência se acrescenta o fato da fraca relação dos alunos – nos primeiros anos de escolaridade – com o sistema simbólico no qual a representação pretende se apoiar. É importante ter presente este tipo de dificuldades na hora de escolher uma forma não-convencional de representação na formulação de um problema.

Mesmo assim, convém destacar os problemas de interpretação dos textos verbais. Freqüentemente se costuma atribuir a dificuldade dos alunos na interpretação de enunciados a problemas de "leitura compreensiva", como se a compreensão de textos matemáticos fosse uma "aplicação" de uma capacidade geral de leitura. Nesta hipótese, diminui-se a importância de um trabalho específico na aula de matemática destinado à interpretação das relações matemáticas implicadas nos enunciados.

Por outro lado, alguns *sistemas convencionais* de representação – por suas características intrínsecas – favorecem o aprofundamento da ilusão de transparência de que falávamos antes. Duval (2002), por exemplo, destaca uma particularidade das representações geométricas que ilumina especialmente esse fenômeno.

> As figuras geométricas apresentam necessariamente características topológicas, afins e métricas, o que leva a considerá-las como sendo da mesma natureza do que aquilo que elas representam [...].

Quer dizer que as particularidades das representações geométricas[10] aprofundam a dificuldade de conseguir que "o objeto não seja confundido com sua representação", uma das condições estabelecidas por Duval para que a representação funcione como tal.

De qualquer maneira, o problema da representação não é patrimônio da geometria e começa no domínio numérico com a entrada dos "*x*" na aula de matemática: tanto o numeral "2" como o desenho de um losango são representações e – uma vez que os objetos que representam não são perceptíveis pelos sentidos – existe uma tendência natural a identificar os objetos com suas representações, como já observava Frege, em 1891.

Voltamos assim para o problema apresentado no início deste capítulo sobre a representação na matemática, visto agora na complexidade de *interpretação do funcionamento* de um sistema simbólico. Destacamos, assim, a importância de interpretar as representações utilizadas pelos alunos como uma *maneira de conhecer*, constitutiva dos conhecimentos matemáticos que os alunos constroem. A análise deste item quer mostrar um aspecto complementar no processo de ensino: trata-se da necessidade de escolha de sistemas de represen-

tação adequados e de considerar como *objeto de ensino* o funcionamento dos sistemas simbólicos. Contudo, insistimos na necessidade de distinguir conceitualmente o objeto matemático de sua representação a fim de conduzir um ensino satisfatório, o que não significa que alguém deva considerar separadamente o ensino dos objetos matemáticos e o ensino dos sistemas simbólicos. Não se trata de ensinar os sistemas simbólicos à margem da atividade matemática, como se se tratasse de um capítulo à parte do ensino da matemática, mas de compreender que, embora um sistema de representação não se confunda com o objeto matemático, constitui um objeto de conhecimento e de ter presente toda a complexidade que isso supõe para o sujeito que tenta se apropriar dele. Esta apropriação está relacionada com a do objeto matemático, mas não se reduz a ela, enquanto o sistema de representação tem uma especificidade.

O trabalho didático necessário é a longo prazo e compromete todos os níveis de escolaridade, devendo começar nos primeiros anos.[11] O critério geral deveria ter presente tanto as questões específicas relativas à apropriação dos diversos sistemas de representação como as relações que devem ser estabelecidas com os objetos que representam, cuidando especialmente de favorecer uma atividade matemática tendente a que as diversas representações funcionem como tais. Particularmente, se deveria proporcionar aos alunos, desde o começo da escolaridade, atividades com diferentes formas de representação (representações verbais, simbólicas, icônicas, etc.) (Duval, 1993, 1995), a fim de que estejam em contato com experiências que lhes permitam conhecer tanto o funcionamento dos sistemas simbólicos como os diversos aspectos dos objetos matemáticos que estes permitem representar.[12] Para isso, o professor precisa identificar as características dos diversos sistemas simbólicos,[13] as relações que têm com os objetos que representam, a complexidade que sua apropriação supõe em cada caso, a diversa pertinência de uns e outros em função dos conhecimentos que se pretende abordar, bem como ter acesso às pesquisas didáticas sobre seu ensino.[14]

ENSINO DOS SISTEMAS SIMBÓLICOS: UM REGRESSO AO EMPIRISMO?

É necessário considerar como objeto de ensino o funcionamento dos sistemas simbólicos? Sim, é claro; naturalmente, não só se deve ensinar conceitos, como se deve ensinar a representar os números, o funcionamento do sistema... Deve-se ensinar a fazer contas! O problema é como. Para aprofundar este aspecto importante da educação matemática, vamos analisar agora uma oposição entre *conceitual* e *mecânico* que acontece com freqüência ao expressar frustrações sobre as conquistas dos alunos.

Talvez o leitor tenha escutado ou formulado alguma vez expressões que opõem o "resolver um problema compreensivelmente, raciocinando e utilizando conceitos" e "resolvê-lo mecanicamente, operando sobre os símbolos". Esta oposição é falsa, porque se apresenta em duas dimensões diferentes de análise: a de dispor de um conhecimento e a de sua aprendizagem. Vejamos porquê.

O fato de os mecanismos de cálculo poderem ser utilizados "automaticamente" é, sem dúvida, um objetivo da educação matemática. Todavia também se espera que os conceitos matemáticos – embora não sejam mecanismos – estejam disponíveis, que se possa ter acesso a eles "automaticamente", uma vez adquiridos. É o que acontece quando conceitos e algoritmos são do domínio do sujeito. O professor, por exemplo, automaticamente conta a quantidade de seus alunos quando se propõe ir ao teatro e comprar ingressos para levá-los todos juntos e identifica também imediatamente se um problema é "de mais" ou "é de vezes". Mesmo assim, resolve facilmente uma conta, porque domina os mecanismos de cálculo. Dizemos que, para o professor, nenhuma dessas coisas é um "problema". A possibilidade de ter acesso automaticamente a um conhecimento não depende de sua *natureza* (conceitual ou simbólica), mas do *nível de conhecimento* no qual a pessoa se situa quando enfrenta uma situação.

No entanto, *enquanto se está aprendendo*, nem os mecanismos, nem os conceitos estão

disponíveis para a mente dessa maneira. Cabe, então, perguntar-se pelas condições de sua aprendizagem. Nesse sentido, é importante notar que a tradição escolar deu sempre um lugar de importância à aprendizagem de conceitos. As diversas correntes de ensino – com maior ou menor sucesso – sempre consideraram como problema didático conseguir que os alunos tivessem acesso a uma aprendizagem conceitual dos objetos matemáticos.

Em relação aos mecanismos de cálculo, seguiu-se um caminho diferente. Sem dar importância às dificuldades dos alunos para efetuar operações e considerando os algoritmos de cálculo convencionais como conteúdos – e dos difíceis – a serem ensinados, a tradição escolar manteve-se em uma *postura didática* diferente, como se não tivesse nada para ser compreendido, mas somente para ser observado e recordado como se faz para multiplicar, dividir, etc. Talvez isso tenha origem no alto grau de automatização que o adulto – particularmente o professor – apresenta do sistema numérico, em que reside uma força e uma fraqueza: a *força* de poder fazer cálculos "sem pensar" – graças à economia do sistema – e a *fraqueza* de não ter acesso conscientemente à maneira como os algoritmos de cálculo têm incorporadas as propriedades das operações. E isso tem conseqüências sobre o ensino, porque leva a não perceber que este conhecimento é motivo de *construção*.

Realmente, o risco é considerar que os *conceitos* são motivo de construção, que estão ligados ao sentido, à compreensão, enquanto os *mecanismos* estão desprovidos de sentido e se pode ter acesso a eles pela observação sensorial.

É assim que, em algumas correntes de ensino, coexistem uma *concepção construtivista* do ensino de conceitos matemáticos e uma *concepção empirista* em relação aos sistemas simbólicos. Cabe perguntar-se, então, se essa coexistência está baseada em concepções de aprendizagem que a justifiquem. Em nossa opinião, o fenômeno não parece dever-se a uma decisão consciente baseada em uma concepção empirista da aprendizagem dos sistemas simbólicos, mas ao fato de que as pesquisas sobre o tema dessas aprendizagens penetraram o sistema educacional em menor grau que as pesquisas feitas em relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos. Particularmente, falta integrar à sala de aula os resultados de pesquisas que mostram propostas didáticas e que apresentam uma hipótese construtivista em relação com ambos os aspectos da educação matemática, uma vez que identificam processos de aprendizagem mediante os quais ambos os aspectos participam dialeticamente um do outro.

Para trabalhar em uma hipótese construtivista, devemos agregar ao conjunto de saberes necessários identificados anteriormente a capacidade do professor de dispor e*xplicitamente* dos conhecimentos que devem ser ensinados. Esta afirmação merece uma explicação, embora possa parecer óbvia ao leitor, que sempre – em sua atividade docente – considerou explicitamente os conhecimentos que se dispôs a ensinar. O professor, por exemplo, conhece explicitamente o algoritmo da multiplicação, mas pode ter "esquecido" a maneira como este mecanismo de cálculo incorporou as propriedades das operações que o justificam; conseqüentemente, as indicações sobre como multiplicar podem ser "mágicas", isto é, sem fundamento. Um bom exemplo dessa "magia" acontece quando, para efetuar a seguinte multiplicação

$$\begin{array}{rr} & 23 \\ \times & 340 \\ \hline & 920 \\ 69 & \\ \hline & 7820 \end{array}$$

são feitas observações deste tipo: "Zero vezes toda a quantidade, zero"; e, em seguida: "Não se esqueçam de que, depois de multiplicar por quatro, deve-se deixar os espaços".

O conhecimento do *fundamento* dessas regras é tão importante como o conhecimento das regras em si mesmas. Trata-se de conhecer o funcionamento do sistema de numeração decimal e sua relação com o objeto que representa (o número). Para fazer o aluno com-

preender um algoritmo de cálculo, uma condição necessária é que o professor tenha acesso conscientemente às propriedades que estão por trás do mesmo. Se para o professor se transformaram em conhecimentos implícitos por automatização, é importante saber que podem tornar-se novamente conscientes quando a situação assim o exija (Duval, 2002), como acontece quando se pretende conduzir um ensino que esteja de acordo com este enfoque.

SÍNTESE EM TERMOS DE SABERES NECESSÁRIOS

Fizemos uma análise em relação ao numérico, com a intenção de apresentar – como anunciamos na introdução – diversas dimensões relevantes para abordar a complexidade da aquisição do "sentido" na matemática. Vimos que existe um sentido dos conceitos, um sentido dos símbolos, um sentido das expressões, um sentido dos conhecimentos, bem como diversos aspectos constitutivos do sentido em cada caso e condições adequadas para sua aquisição. Identificar esses diversos aspectos é a etapa inicial para abordar um ensino da matemática que se proponha seriamente à conquista da aquisição do "sentido" nesta disciplina.

Por outro lado, por meio da análise anterior, identificamos diversos saberes necessários para conduzir um ensino que contemple as diversas dimensões do sentido que apresentamos: saberes relativos ao edifício matemático; saberes relativos à aprendizagem; saberes didáticos. Essa distinção – justificada por razões teóricas – é mantida aqui com finalidade expositiva e não deve ser considerada como uma divisão. Como se verá ao longo dos diversos capítulos do livro, tanto o desenvolvimento da didática da matemática como o trabalho docente realizado dentro deste marco teórico exigem a capacidade de integração desses diversos saberes.

Saberes relativos ao edifício matemático

Encontramos, nas diversas perspectivas de análise, a necessidade de distinguir conceitualmente os aspectos atribuíveis ao objeto e os atribuíveis à sua representação, bem como a compreensão de suas relações.

Com relação ao numérico, trata-se de compreender os aspectos relativos a ele e às operações numéricas (objeto) e os relativos ao sistema de numeração (representação), bem como suas diferenças e suas relações. Mais detalhadamente, trata-se de compreender:[15]

- As funções dos diferentes tipos de números para quantificar aspectos da realidade (contar, medir, etc.).[16]
- O caráter de necessidade das operações e suas propriedades em relação com as funções dos números.
- A independência das propriedades dos diversos tipos de números e operações das características de notação do sistema de numeração.
- A forma de funcionamento dos diferentes sistemas simbólicos e as possibilidades de representação e de cálculo que oferecem – particularmente, compreender de que maneira os algoritmos convencionais de cálculo incorporam as propriedades das operações.
- O sistema misto de regras utilizado no cálculo: regras próprias do objeto e regras do sistema de representação utilizado, etc.

Saberes relativos à aprendizagem

- Interpretar os procedimentos e representações em termos de conhecimentos que os alunos põem em prática ao executá-los.
- Distinguir nos conhecimentos dos alunos os que são atribuíveis aos objetos de conhecimento daqueles que comprometem fundamentalmente particularidades dos sistemas simbólicos.
- Considerar as diversas maneiras de conhecer (implícitas, conscientes, explícitas) como constitutivas dos conhecimentos.

Saberes didáticos

- Identificar diversas dimensões da construção do "sentido" na aprendizagem da matemática.

- Identificar relações entre as práticas áulicas e os conhecimentos que os alunos constroem (ausência ou presença de "sentido" em seus conhecimentos).
- Reconhecer a importância de permitir os procedimentos e representações espontâneos dos alunos na evolução do conhecimento.
- Reconhecer a complexidade do funcionamento dos sistemas simbólicos utilizados no ensino da matemática.
- Reconhecer, nas diversas concepções de ensino, as concepções didáticas subjacentes.

As pesquisas cognitivas e didáticas oferecem elementos para orientar uma gestão da aprendizagem e do ensino em uma perspectiva que leve em conta tanto a especificidade do nível no qual se desenvolve o ensino como as aprendizagens que devem ser realizadas a longo prazo por meio da escolaridade. Assim mesmo, abordam problemas gerais da construção do sentido na matemática, assim como problemas particulares de domínios específicos (aritmética, geometria, etc.). Este livro contém análises e situações didáticas que explicam pesquisas internacionais e nacionais, particularmente dos próprios autores. Esses trabalhos, junto com os saberes necessários que acabamos de sintetizar e a sustentação teórica proposta pela teoria de situações didáticas, são recursos para escolher as situações adequadas ao saber matemático para o qual se aponte em um dado momento do ensino e para fazer uma gestão de classe que facilite a construção do sentido dos conhecimentos por parte dos alunos.

NOTAS

1 Tentamos, na medida do possível, fazer referência a artigos publicados em castelhano. No caso de bibliografia em outro idioma, a tradução esteve a cargo dos autores de cada capítulo.

2 Conforme, por exemplo, Parra (1994) e Saiz (1994).

3 Na Argentina, o planejamento (*planteo*) é uma forma convencional de organização dos dados que é ensinada aos alunos com a intenção de ajudá-los a raciocinar para resolver um problema.

4 Mais precisamente, Duval destaca a importância de que o ensino assuma como sua responsabilidade o trabalho dos alunos com diferentes maneiras de representar e, com isso, aborde cada uma delas e com as passagens mais ou menos complexas de uma para a outra.

5 Não vamos considerar que essa divisão permite supor que a representação gráfica é não-simbólica, mas não podemos deixar de formular o problema, na medida em que estamos falando especificamente da representação.

6 Ver, por exemplo, em Parra (1994), diversos modos de resolução de um problema em função das representações que os alunos podem fazer deste (diferentes decomposições numéricas em função das situações que devem ser resolvidas, etc.).

7 Pode-se ver uma análise crítica desta tradição escolar em Saiz (1994).

8 Não distinguiremos aqui o caráter (implícito ou explicito) da escolha, porque não é significativo neste ponto. Vale a pena lembrar, no entanto, que são possíveis ambas as possibilidades (ver p. 21-23).

9 Charnay (1994b) usa a expressão "indícios desencadeantes", que dá conta significativamente dos efeitos que produz nos alunos o uso de palavras-chave nos enunciados dos problemas.

10 Broitman e Itzcovich (ver Capítulo 8, deste livro) apresentam e analisam problemas didáticos ligados à representação na geometria, baseando-se em resultados de pesquisas nacionais e internacionais.

11 Neste livro, Moreno (Capítulo 3) aborda considerações gerais sobre o ensino do sistema de numeração decimal, e Quaranta, Tarasow e Wolman (Capítulo 5) apresentam resultados de uma pesquisa sobre o mesmo tema.

12 Em Panizza (1997), são analisados alguns erros que podem ser explicados em termos de concepções dos alunos ligadas ao uso prolongado ou exclusivo de representações que privilegiam alguns significados em detrimento de outros.

13 Lerner e Sadovsky (1994) fazem uma análise comparativa de diversos sistemas de numeração, particularmente do decimal e do falado (de fala espanhola). Brissiaud (1993) faz uma análise comparativa de diversos sistemas simbólicos para representar quantidades e para o cálculo, particularmente do ponto de vista dos conhecimentos que são ou não postos em prática através de seu uso em cada caso.

14 Na Argentina, está se desenvolvendo desde 1992 um conjunto de pesquisas sobre a aprendizagem do sistema de numeração. Uma referência detalhada é apresentada no Capítulo 5.
15 Skemp (1980) fez um excelente desenvolvimento desses aspectos do edifício matemático.
16 Os Capítulos 3 e 4 apresentam diversos aspectos e funções do número natural.

REFERÊNCIAS

BRISSIAUD, R. *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor, 1993.

BROUSSEAU, G. "Les obstacles epistémologiques et les problèmes d'enseignement". In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2, 1983.

CHARNAY R. "Aprender (por medio de) la resolución de problemas". In: C. Parra e I. Saiz (comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós, 1994a.

_____. "Del analisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación: algunas pistas..." In: C. Parra, I. Saiz e P. Sadovsky, *Enseñanza de la matemática. Selección bibliográfica IV*, documento produzido por PTFD, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. República Argentina, 1994b.

DROUHARD, J.-P. "Algèbre, calcul symbolique et didactique". In: R. Noirfalise e M.-J. Perrin-Glorian (comps.), *Actes de la VIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand, 1995. O mesmo texto é encontrado em J.-P. Drouhard, "Signes et sens en calcul symbolique", *Actes du séminaires SFIDA*. Niza: IREM de Niza, 1996.

DUVAL, R. "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, Estrasburgo, 1993.

_____. *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang,1995.

_____. *Cours de psychologie et de didactique pour les professeurs d'école*, Polycopié. Gravelines: IUFM du Nord-Pas-de-Calais, 2001.

_____. "'Voir'" en Mathematiques". In: E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera e U. Ursini (eds.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica (no prelo), 2002.

FREGE, G. *Escritos lógico-semánticos*. Madrid: TECNOS, 1974.

LABORDE, C. "Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques". In: C. Garnier, N. Bernardz e I. Ulanovskaya: *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale,* Bruxelas: De Boeck, 1991.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. "El sistema de numeración: un problema didáctico". In: C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós, 1997.

PANIZZA, M. "Aproximación al análisis del error desde una perspectiva constructivista del aprendizaje". In: *Los CBC y la enseñanza de la matemática*. Buenos Aires: A-Z, 1994.

PARRA, C. "Cálculo mental en la escuela primaria". In: C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós, 1994.

SAIZ, I. "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". In: C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós, 1994.

SIERPINSKA, A. *La compréhension en mathématiques*. Quebec: De Boeck Université,1995.

SKEMP, R. *Psicología del aprendizaje de la matemática*. Madrid: Morata, 1980.

VERGNAUD, G. "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 1991.

_____. "The theory of conceptual fields". In: L. P. STEFFE, P. NESHER, P. COBB, G. A. GOLDIN e B. GREER (eds.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 1996.