

SINAIS E SISTEMAS

Neste capítulo, discutiremos certos aspectos fundamentais dos sinais. Também apresentaremos conceitos básicos importantes e explicações qualitativas sobre as razões e os métodos da teoria de sistemas. Dessa forma, construiremos uma sólida base para a compreensão da análise quantitativa do restante do livro.

SINAIS

Um *sinal* é um conjunto de dados ou informação. Como exemplo, temos um sinal de telefone ou televisão, o registro de vendas de uma corporação ou os valores de fechamento da bolsa de negócios (por exemplo, o valor médio do índice BOVESPA). Em todos esses exemplos, os sinais são funções da variável independente *tempo*, entretanto, este nem sempre é o caso. Quando uma carga elétrica é distribuída sobre um corpo, por exemplo, o sinal é a densidade de carga, uma função do *espaço* em vez do tempo. Neste livro, trabalharemos quase que exclusivamente com sinais que são função do tempo. A discussão, entretanto, se aplica de maneira equivalente para outros tipos de variáveis independentes.

SISTEMAS

Os sinais podem ser posteriormente processados por *sistemas*, os quais podem modificá-los ou extrair informação adicional. Por exemplo, um operador de artilharia anti-aérea pode querer saber a posição futura de um alvo hostil que está sendo seguido por seu radar. Conhecendo o sinal do radar, ele sabe a posição passada e a velocidade do alvo. Através do processamento do sinal do radar (a entrada), ele pode estimar a posição futura do alvo. Portanto, um sistema é uma entidade que *processa* um conjunto de sinais (*entradas*) resultando em um outro conjunto de sinais (*saídas*). Um sistema pode ser construído com componentes físicos, elétricos, mecânicos ou sistemas hidráulicos (realização em *hardware*) ou pode ser um algoritmo que calcula uma saída de um sinal de entrada (realização em *software*).

1.1 TAMANHO DO SINAL

O tamanho de qualquer entidade é um número que indica a largura ou o comprimento da entidade. Genericamente falando, a amplitude do sinal varia com o tempo. Como um sinal que existe em um certo intervalo de tempo com amplitude variante pode ser medido por um número que irá indicar o tamanho ou a força do sinal? Tal medida deve considerar não apenas a amplitude do sinal, mas também sua duração. Por exemplo, se quisermos utilizar um único número V como medida do tamanho de um ser humano, devemos considerar não somente seu peso, mas também sua altura. Se fizermos uma consideração que a forma da pessoa é um cilindro cuja variável é o raio r (o qual varia com a altura h), então uma possível medida do tamanho de uma pessoa de altura H é o volume V da pessoa, dado por

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh \quad (1.1)$$

1.1-1 Energia do Sinal

Argumentando desta forma, podemos considerar a área abaixo do sinal $x(t)$ como uma possível medida de seu tamanho, pois a área irá considerar não somente a amplitude, mas também sua duração. Entretanto, esta medida ainda é defeituosa, pois mesmo para um sinal grande $x(t)$, suas áreas positivas e negativas podem se cancelar, indicando um sinal de tamanho pequeno. Esta dificuldade pode ser corrigida pela definição do tamanho do sinal como a área debaixo de $x^2(t)$ a qual é sempre positiva. Podemos chamar essa medida de *energia do sinal* E_x , definida (para um sinal real) por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (1.2a)$$

Essa definição pode ser generalizada para um sinal complexo $x(t)$, sendo dada por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.2b)$$

Também existem outras possíveis medidas do tamanho de um sinal, tal como a área sob $|x(t)|$. A medida de energia, entretanto, é mais fácil de ser trabalhada matematicamente e com mais sentido (como será mostrado posteriormente), com a idéia de ser um indicativo da energia que pode ser extraída do sinal.

1.1-2 Potência do Sinal

A energia do sinal deve ser finita para que seja uma medida significativa do tamanho do sinal. Uma condição necessária para que a energia seja finita é que a amplitude do sinal $\rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ (Fig. 1.1a). Caso contrário a integral da Eq. (1.2a) não irá convergir.

Quando a amplitude do sinal $x(t)$ não $\rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$ (Fig. 1.1b), a energia do sinal é infinita. Uma medida mais significativa do tamanho do sinal neste caso é a energia média, se ela existir. Esta medida é chamada de *potência* do sinal. Para um sinal $x(t)$, definimos sua potência P_x por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.3a)$$

Podemos generalizar esta definição para um sinal complexo $x(t)$, sendo dada por,

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.3b)$$

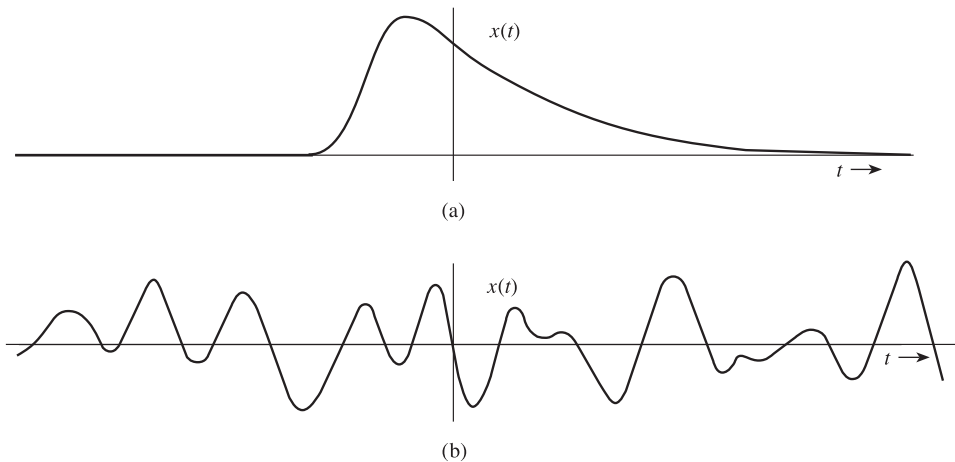


Figura 1.1 Exemplos de sinais: (a) um sinal com energia finita e (b) um sinal com potência finita

Observe que a potência do sinal P_x é uma média temporal do quadrado da amplitude do sinal, ou seja, o valor *médio quadrático* de $x(t)$. De fato, a raiz quadrada de P_x é o já conhecido valor *rms* (raiz média quadrática) de $x(t)$.

Geralmente, a média de uma entidade ao longo de um grande intervalo de tempo aproximando do infinito existe se a entidade for periódica ou possuir uma regularidade estatística. Se tal condição não for satisfeita, a média não existirá. Por exemplo, um sinal em rampa, $x(t) = t$, aumenta indefinidamente quando $|t| \rightarrow \infty$ e nem a energia nem a potência existirão para este sinal. Entretanto, a função degrau unitário, a qual não é periódica nem possui regularidade estatística, possui uma potência finita.

Quando $x(t)$ é periódica, $|x(t)|^2$ também é periódica. Portanto, a potência de $x(t)$ pode ser calculada da Eq. (1.3b) efetuando a média de $|x(t)|^2$ em um período.

Comentários. A energia do sinal, tal como definida pelas Eqs. (1.2) não indica a energia real (no sentido convencional) do sinal, pois a energia do sinal depende não somente do sinal, mas também da carga. Ela pode, entretanto, ser interpretada como a energia dissipada em uma carga normalizada de um resistor de 1-ohm, se a tensão $x(t)$ fosse aplicada ao resistor de 1-ohm (ou se a corrente $x(t)$ passasse através de um resistor de 1-ohm). A medida de “energia” é, portanto, indicativa da capacidade de energia do sinal, não da energia real. Por essa razão, os conceitos de conservação de energia não devem ser aplicados a “Energia do sinal”. Uma observação paralela se aplica à “potência do sinal”, definida pelas Eq. (1.3). Essas medidas são indicadores convencionais do tamanho do sinal, sendo bastante úteis em várias aplicações. Por exemplo, se aproximarmos um sinal $x(t)$ por outro sinal $g(t)$, o erro de aproximação é $e(t) = x(t) - g(t)$. A energia (ou potência) de $e(t)$ é um indicador conveniente de quão boa foi a aproximação. Ela nos fornece uma medida quantitativa para determinarmos quão perto está a aproximação. Em sistemas de comunicação, durante a transmissão em um canal, sinais de mensagem são corrompidos por sinais indesejados (ruído). A qualidade do sinal recebido é avaliada através dos tamanhos relativos do sinal desejado e do sinal indesejado (ruído). Nesse caso, a razão entre a potência do sinal de mensagem e do sinal de ruído (relação sinal ruído) é um bom indicador da qualidade do sinal recebido.

Unidades de Energia e Potência. As Eqs. (1.2) não estão dimensionalmente corretas. Isso ocorre porque estamos usando o termo *energia* não em seu sentido convencional, mas para indicar o tamanho do sinal. A mesma observação é aplicada às Eqs. (1.3) para potência. As unidades de energia e potência, como definidas aqui, dependem da natureza do sinal $x(t)$. Se $x(t)$ for um sinal de tensão, sua energia E_x possui unidades de volts quadrados-segundo (V^2s), e sua potência P_x possui unidade de volts quadrados. Se $x(t)$ for um sinal de corrente, suas unidades serão amperes quadrados-segundo (A^2s) e amperes quadrados, respectivamente.

EXEMPLO 1.1

Determine as medidas adequadas dos sinais da Fig. 1.2.

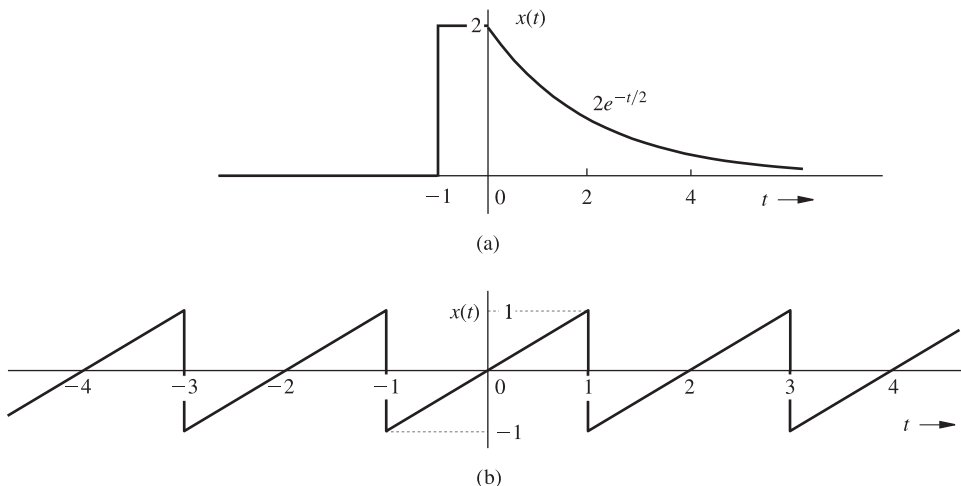


Figura 1.2

Na Fig. 1.2a, a amplitude do sinal $\rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Portanto, a medida adequada para esse sinal é sua energia E_x , dada por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-1}^0 (2)^2 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8$$

Na Fig. 1.2b, a amplitude do sinal não $\rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Entretanto, ela é periódica e, portanto, sua potência existe. Podemos utilizar a Eq. (1.3a) para determinar sua potência. Podemos simplificar o procedimento para sinais periódicos observando que um sinal periódico se repete regularmente a cada período (2 segundos neste caso). Portanto, fazendo a média de $x^2(t)$ em um intervalo infinitamente grande é idêntico a calcular a média em um período (2 segundos neste caso). Portanto,

$$P_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Lembre-se de que o sinal de potência é o quadrado de seu valor rms. Portanto, o valor rms desse sinal é $1/\sqrt{3}$.

EXEMPLO 1.2

Determine a potência e o valor rms de

- (a) $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$
- (b) $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad \omega_1 \neq \omega_2$
- (c) $x(t) = D e^{j\omega_0 t}$

(a) Este é um sinal periódico com período $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A medida adequada desse sinal é sua potência. Como ele é periódico, podemos calcular sua potência calculando a média de sua energia em um período $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Entretanto, para efeito de demonstração, resolveremos este problema calculando a média em um intervalo infinitamente grande, usando a Eq. (1.3a).

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito é igual a $C^2/2$. O segundo termo, entretanto, é igual a zero, pois a integral que aparece neste termo representa a área abaixo de uma senóide em um intervalo de tempo T muito grande, com $T \rightarrow \infty$. Essa área é, no máximo, igual a área de meio período, devido aos cancelamentos das áreas positivas e negativas da senóide. O segundo termo é a área multiplicada por $C^2/2T$ com $T \rightarrow \infty$. Claramente este termo é nulo e

$$P_x = \frac{C^2}{2} \tag{1.4a}$$

Essa equação mostra que uma senóide com amplitude C possui potência igual a $C^2/2$, independente do valor de sua frequência ω_0 ($\omega_0 \neq 0$) e fase θ . O valor rms é $C/\sqrt{2}$. Se a frequência do sinal fosse zero (um sinal CC ou um sinal constante de amplitude C), o leitor pode mostrar que a potência é C^2 .

(b) No Capítulo 6, iremos mostrar que a soma de suas senóides pode ou não ser periódica, dependendo da relação ω_1/ω_2 ser um número racional ou não. Portanto, o período deste sinal não é conhecido. Logo, sua potência será determinada calculando a média da energia em T segundos, com $T \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) dt \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2C_1 C_2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) dt \end{aligned}$$

A primeira e a segunda integrais do lado direito são as potências das duas senóides, as quais são $C_1^2/2$ e $C_2^2/2$, como determinado no item (a). O terceiro termo, o produto das duas senóides, pode ser escrito como a soma de duas senóides $\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)]$ e $\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]$, respectivamente. Agora, argumentando tal como no item (a), vemos que o terceiro termo é nulo. Logo, teremos[†]

$$P_x = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} \quad (1.4b)$$

E o valor rms é $\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)/2}$.

Podemos facilmente estender este resultado para uma soma de qualquer número de senóides com frequências distintas. Portanto, se

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

assumindo que nenhuma das senóides tenham frequências idênticas e $\omega_n \neq 0$, então,

$$P_x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \quad (1.4c)$$

Se $x(t)$ também possuir um valor CC, tal como

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

Então

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \quad (1.4d)$$

(c) Neste caso, o sinal é complexo e utilizaremos a Eq. (1.3b) para calcular a potência.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |De^{j\omega_0 t}|^2 dt$$

[†] Essa afirmativa é verdadeira somente se $\omega_1 \neq \omega_2$. Se $\omega_1 = \omega_2$, o integrando do terceiro termo irá conter a constante $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ e o terceiro termo $\rightarrow 2C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ quando $T \rightarrow \infty$.

Lembre-se que $|e^{j\omega t}| = 1$, tal que $|De^{j\omega t}|^2 = |D|^2 e$

$$P_x = |D|^2 \tag{1.4e}$$

O valor rms é $|D|$.

Comentário. Na parte (b) do Exemplo 1.2 mostramos que a potência de uma soma de duas senóides é igual à soma das potências das senóides. Pode parecer que a potência de $x_1(t) + x_2(t)$ é $P_{x_1} + P_{x_2}$. Infelizmente esta conclusão geralmente não é verdadeira. Ela é válida apenas para uma certa condição (ortogonalidade), discutida posteriormente (Seção 6.5-3).

EXERCÍCIO E1.1

Mostre que as energias dos sinais da Fig. 1.3a, 1.3b, 1.3c e 1.3d são 4, 1, 4/3 e 4/3, respectivamente. Observe que o dobro do sinal quadruplica sua energia e o deslocamento no tempo de um sinal não possui efeito em sua energia. Mostre também que a potência do sinal da Fig. 1.3e é 0,4323. Qual é o valor rms do sinal da Fig. 1.3e?

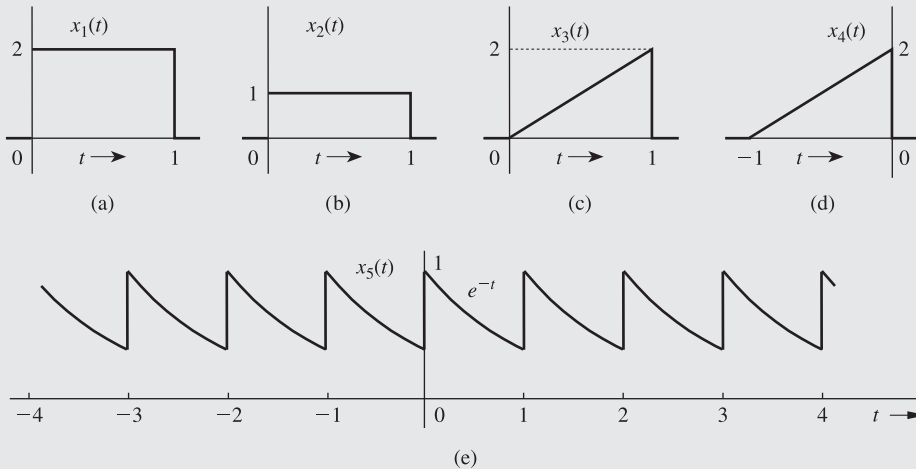


Figura 1.3

EXERCÍCIO E1.2

Refaça o Exemplo 1.2a para determinar a potência da senóide $C \cos(\omega_0 t + \theta)$ calculando a média da energia do sinal em um período $T_0 = 2\pi\omega_0$ (em vez de calcular a média em um intervalo infinitamente grande de tempo). Mostre também que a potência de um sinal CC $x(t) = C_0$ é C_0^2 e seu valor rms é C_0 .

EXERCÍCIO E1.3

Mostre que se $\omega_1 = \omega_2$, a potência de $C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ é $[C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]/2$, o qual não é igual a $(C_1^2 + C_2^2)/2$.

1.2 ALGUMAS OPERAÇÕES ÚTEIS COM SINAIS

Discutiremos aqui três operações úteis com sinais: deslocamento, escalamento e inversão. Como a variável independente na nossa descrição de sinal é o tempo, estas operações serão chamadas de *deslocamento temporal*, *escalamento temporal* e *reversão (inversão) temporal*. Entretanto, esta discussão é válida para funções tendo outras variáveis independentes que não o tempo (por exemplo, a frequência ou a distância).

1.2-1 Deslocamento Temporal

Considere um sinal $x(t)$ (Fig. 1.4a) e o mesmo sinal atrasado por T segundos (Fig. 1.4b), o qual chamaremos de $\phi(t)$. O que acontecer em $x(t)$ (Fig. 1.4a) em algum tempo t também acontecerá com $\phi(t)$ (Fig. 1.4b) T segundos após, no instante $t + T$. Portanto,

$$\phi(t + T) = x(t) \quad (1.5)$$

e

$$\phi(t) = x(t - T) \quad (1.6)$$

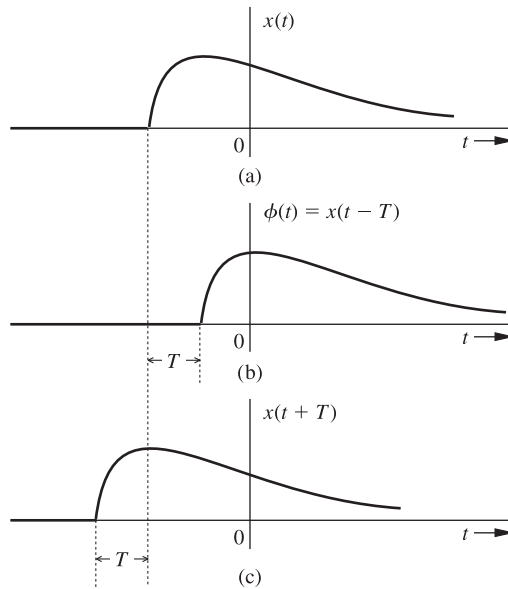


Figura 1.4 Deslocamento temporal de um sinal.

Logo, no deslocamento temporal de um sinal por T segundos, substituímos t por $t - T$. Logo $x(t - T)$ representa $x(t)$ deslocado no tempo por T segundos. Se T for positivo, o deslocamento é para a direita (atraso), como na Fig. 1.4b. Se T for negativo, o deslocamento é para a esquerda (avanço), como na Fig. 1.4c. Claramente, $x(t - 2)$ é $x(t)$ atrasado (deslocado para a direita) de 2 segundos e $x(t + 2)$ é $x(t)$ avançado (adiantado, deslocado para a esquerda) por 2 segundos.

EXEMPLO 1.3

A função exponencial $x(t) = e^{-2t}$ mostrada na Fig. 1.5a é atrasada por 1 segundo. Trace e descreva matematicamente a função atrasada. Repita o problema com $x(t)$ adiantado por 1 segundo.

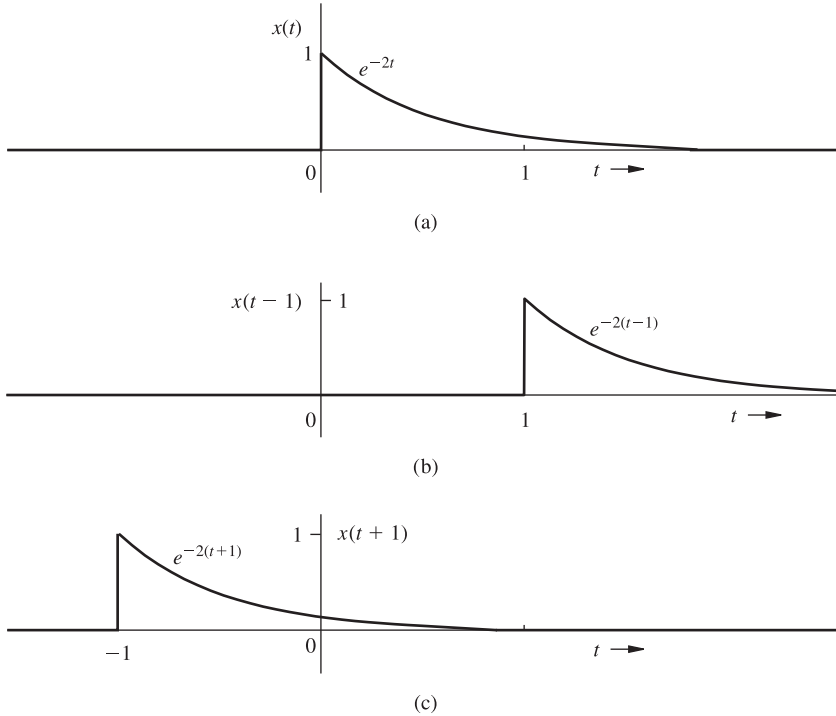


Figura 1.5 (a) Sinal $x(t)$. (b) Sinal $x(t)$ atrasado em 1 segundo. (c) Sinal $x(t)$ adiantado em 1 segundo.

A função $x(t)$ pode ser matematicamente descrita por

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Seja $x_d(t)$ a representação da função $x(t)$ atrasada (deslocada para direita) em 1 segundo, como ilustrado na Fig. 1.5b. Esta função é $x(t-1)$. Sua descrição matemática pode ser obtida de $x(t)$ substituindo t por $t-1$ na Eq. (1.7). Logo

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \quad \text{ou} \quad t \geq 1 \\ 0 & t-1 < 0 \quad \text{ou} \quad t < 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Seja $x_a(t)$ a representação da função $x(t)$ adiantada (deslocada para esquerda) em 1 segundo, como mostrado na Fig. 1.5c. Esta função é $x(t+1)$. Sua descrição matemática pode ser obtida de $x(t)$ substituindo t por $t+1$ na Eq. (1.7). Logo

$$x_a(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \quad \text{ou} \quad t \geq -1 \\ 0 & t+1 < 0 \quad \text{ou} \quad t < -1 \end{cases} \quad (1.9)$$

EXERCÍCIO E1.4

Escreva a descrição matemática do sinal $x_s(t)$ da Fig. 1.3c. Este sinal é atrasado em 2 segundos. Trace o sinal atrasado. Mostre que este sinal atrasado $x_d(t)$ pode ser descrito matematicamente por $x_d(t) = 2(t - 2)$ para $2 \leq t \leq 3$ e igual a zero caso contrário. Repita, agora, o procedimento com o sinal adiantado (deslocado para a esquerda) em 1 segundo. Mostre que este sinal adiantado $x_a(t)$ pode ser descrito por $x_a(t) = 2(t + 1)$, para $-1 \leq t \leq 0$ e igual a zero caso contrário.

1.2-2 Escalamento Temporal

A compressão ou expansão de um sinal no tempo é chamada de *escalamento temporal*. Considere o sinal $x(t)$ da Fig. 1.6a. O sinal $\phi(t)$ da Fig. 1.6b é $x(t)$ comprimido no tempo por um fator de 2. Portanto, o que acontecer com $x(t)$ em algum instante t também acontecerá com $\phi(t)$ no instante $t/2$, logo

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) \tag{1.10}$$

e

$$\phi(t) = x(2t) \tag{1.11}$$

Observe que como $x(t) = 0$ para $t = T_1$ e T_2 , temos que ter $\phi(t) = 0$ para $t = T_1/2$ e $T_2/2$, como mostrado na Fig. 1.6b. Se $x(t)$ for gravado em uma fita e reproduzido com o dobro da velocidade de gravação, iremos obter $x(2t)$. Em geral, se $x(t)$ for comprimido no tempo por um fator a ($a > 1$), o sinal resultante $\phi(t)$ é dado por

$$\phi(t) = x(at) \tag{1.12}$$

Usando um argumento similar, podemos mostrar que quando $x(t)$ é expandido (desacelerado) no tempo por um fator a ($a > 1$), temos

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \tag{1.13}$$

A Fig. 1.6c mostra $x(t/2)$, o qual é $x(t)$ expandido no tempo por um fator de 2. Observe que na operação de escalamento no tempo a origem $t = 0$ é um ponto fixo, o qual permanece sem alteração para uma operação de escalamento, pois para $t = 0$, $x(t) = x(at) = 0$.

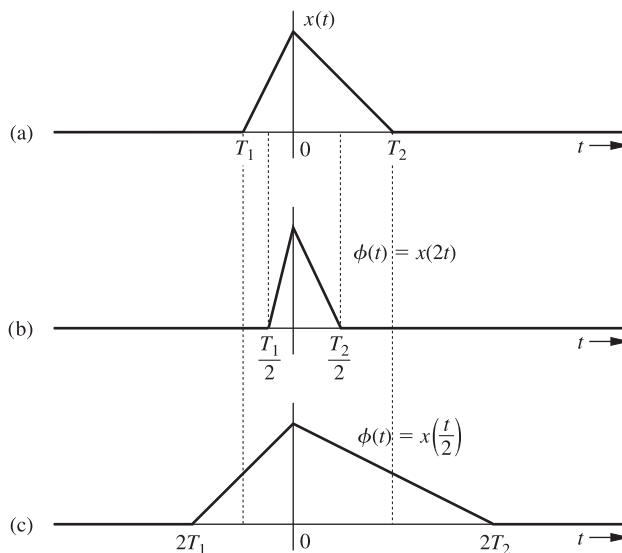


Figura 1.6 Escalamento temporal de um sinal.

Em resumo, para escalonarmos no tempo um sinal por um fator a , substituímos t por at . Se $a > 1$, o resultado de escalamento é uma compressão e se $a < 1$ o resultado do escalamento é uma expansão.

EXEMPLO 1.4

A Fig. 1.7a mostra um sinal $x(t)$. Trace e descreva matematicamente este sinal comprimido no tempo por um fator 3. Repita o problema para o mesmo sinal expandido no tempo por um fator 2.

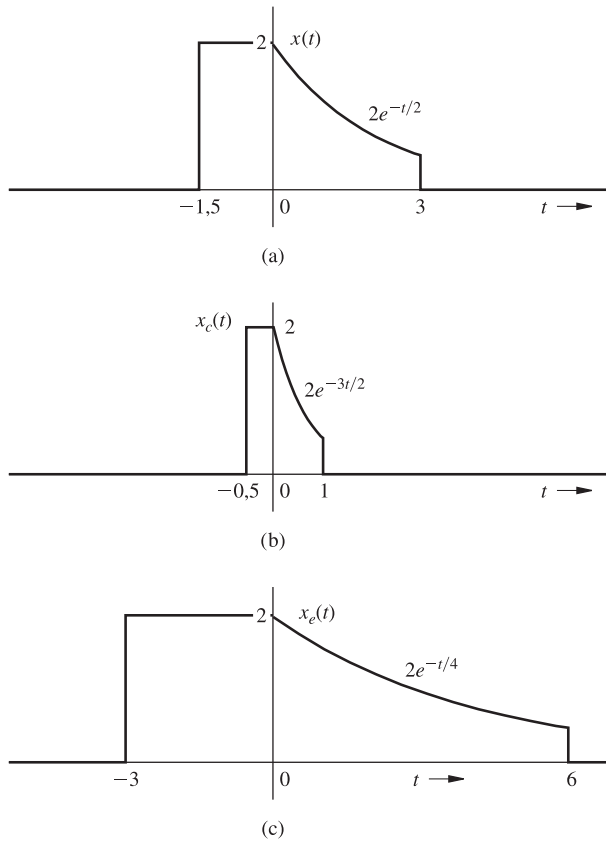


Figura 1.7 (a) Sinal $x(t)$. (b) Sinal $x(3t)$ e (c) sinal $x(t/2)$.

O sinal $x(t)$ pode ser descrito por

$$x(t) = \begin{cases} 2 & -1,5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.14)$$

A Fig. 1.7b mostra $x_c(t)$, o qual é $x(t)$ comprimido no tempo por um fator 3. Conseqüentemente, ele pode ser descrito matematicamente por $x(3t)$, o qual é obtido substituindo t por $3t$ no lado direito da Eq. (1.14). Logo

$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & -1,5 \leq 3t < 0 \quad \text{ou} \quad -0,5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & 0 \leq 3t < 3 \quad \text{ou} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.15a)$$

Observe que os instantes $t = -1,5$ e 3 em $x(t)$ correspondem aos instantes $t = -0,5$ e 1 no sinal comprimido $x(3t)$.

A Fig. 1.7c mostra $x_e(t)$, o qual é $x(t)$ expandido no tempo por um fator 2. Conseqüentemente, ele pode ser descrito matematicamente por $x(t/2)$, o qual é obtido substituindo t por $t/2$ em $x(t)$.

$$x_e(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2 & -1,5 \leq \frac{t}{2} < 0 \text{ ou } -3 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/4} & 0 \leq \frac{t}{2} < 3 \text{ ou } 0 \leq t < 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.15b)$$

Observe que os instantes $t = -1,5$ e 3 em $x(t)$ correspondem aos instantes $t = -3$ e 6 no sinal expandido $x(t/2)$.

EXERCÍCIO E1.5

Mostre que a compressão temporal por um fator n ($n > 1$) de uma senóide resulta em uma senóide com mesma amplitude e fase, mas com uma freqüência aumentada n vezes. Similarmente, a expansão no tempo por um fator n ($n > 1$) de uma senóide resulta em uma senóide com mesma amplitude e fase, mas com freqüência reduzida por um fator n . Verifique sua conclusão traçando a senóide $\text{sen}2t$ e a mesma senóide comprimida por um fator 3 e expandida por um fator 2.

1.2-3 Reversão Temporal

Considere o sinal $x(t)$ da Fig. 1.8a. Podemos ver $x(t)$ como uma forma rígida presa ao eixo vertical. Na reversão temporal de $x(t)$, rotacionamos esta forma em 180° com relação ao eixo vertical. Essa reversão temporal [a reflexão de $x(t)$ com relação ao eixo vertical] nos fornece o sinal $\phi(t)$ (Fig. 1.8b). Observe que o que acontecer na Fig. 1.8a em algum instante t também acontecerá na Fig. 1.8b no instante $-t$, e vice-versa. Portanto,

$$\phi(t) = x(-t) \quad (1.16)$$

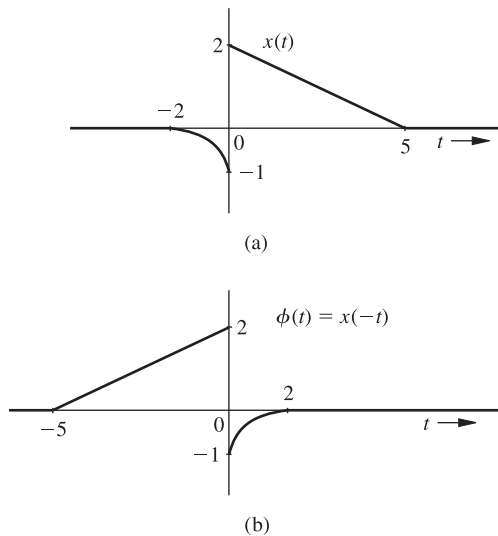


Figura 1.8 Reversão temporal de um sinal.

Logo, para reverter no tempo um sinal, substituímos t por $-t$ e o sinal revertido $x(t)$ resultará no sinal $x(-t)$. Devemos lembrar que a reversão é realizada com relação ao eixo vertical, o qual funciona como uma âncora ou eixo de referência. Lembre-se também que a reversão de $x(t)$ com relação ao eixo horizontal resulta em $-x(t)$.

EXEMPLO 1.5

Para o sinal $x(t)$ mostrado na Fig. 1.9a, trace $x(-t)$, o qual é a reversão temporal de $x(t)$.

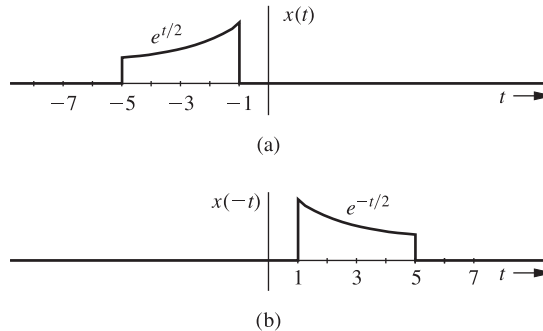


Figura 1.9 Exemplo de reversão temporal.

Os instantes -1 e -5 em $x(t)$ são mapeados nos instantes 1 e 5 em $x(-t)$. Como $x(t) = e^{t/2}$, temos $x(-t) = e^{-t/2}$. O sinal $x(-t)$ é mostrado na Fig. 1.9b. Podemos descrever $x(t)$ e $x(-t)$ por

$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & -1 \geq t > -5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a versão revertida no tempo de $x(-t)$ é obtida substituindo t por $-t$ em $x(t)$, logo

$$x(-t) = \begin{cases} e^{-t/2} & -1 \geq -t > -5 \quad \text{ou} \quad 1 \leq t < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1.2-4 Operações Combinadas

Certas operações complexas necessitam do uso simultâneo de mais de uma das operações descritas. A operação mais geral envolvendo todas as três operações é $x(at - b)$, a qual é realizada em duas possíveis seqüências de operação:

1. Deslocamento temporal de $x(t)$ por b para obter $x(t - b)$. Realize, agora, o escalamento temporal do sinal deslocando $x(t - b)$ por a (isto é, substitua t por at) para obter $x(at - b)$.
2. Escalamento temporal de $x(t)$ por a para obter $x(at)$. Realize, agora, o deslocamento temporal de $x(at)$ por b/a (isto é, substitua t por $t - (b/a)$) para obter $x[a(t - b/a)] = x(at - b)$. Em qualquer um dos casos, se a for negativo, o escalamento no tempo também envolve uma reversão temporal.

Por exemplo, o sinal $x(2t - 6)$ pode ser obtido de duas formas. Podemos atrasar $x(t)$ por 6 para obter $x(t - 6)$ e, então, comprimir no tempo este sinal por um fator de 2 (substitua t por $2t$) para obter $x(2t - 6)$. Alternativamente, podemos primeiro comprimir $x(t)$ por um fator 2 para obter $x(2t)$ e, então, atrasar este sinal por 3 (substituindo t por $t - 3$) para obter $x(2t - 6)$.

1.3 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Existem diversas classes de sinais. Consideraremos aqui apenas as seguintes classes, as quais são adequadas para o escopo deste livro:

1. Sinais contínuos e discretos no tempo
2. Sinais analógicos e digitais
3. Sinais periódicos e não periódicos
4. Sinais de energia e potência
5. Sinais determinísticos e probabilísticos

1.3-1 Sinais Contínuos e Discretos no Tempo

Um sinal que é especificado para valores contínuos de tempo t (Fig. 1.10a) é um *sinal contínuo no tempo*, e um sinal especificado apenas para valores discretos de t (Fig. 1.10b) é um *sinal discreto no tempo*. A saída de um telefone ou câmera de vídeo é um sinal contínuo no tempo, enquanto que o produto interno bruto trimestral, as vendas mensais de uma corporação e as médias diárias do mercado de ação são sinais discretos no tempo.

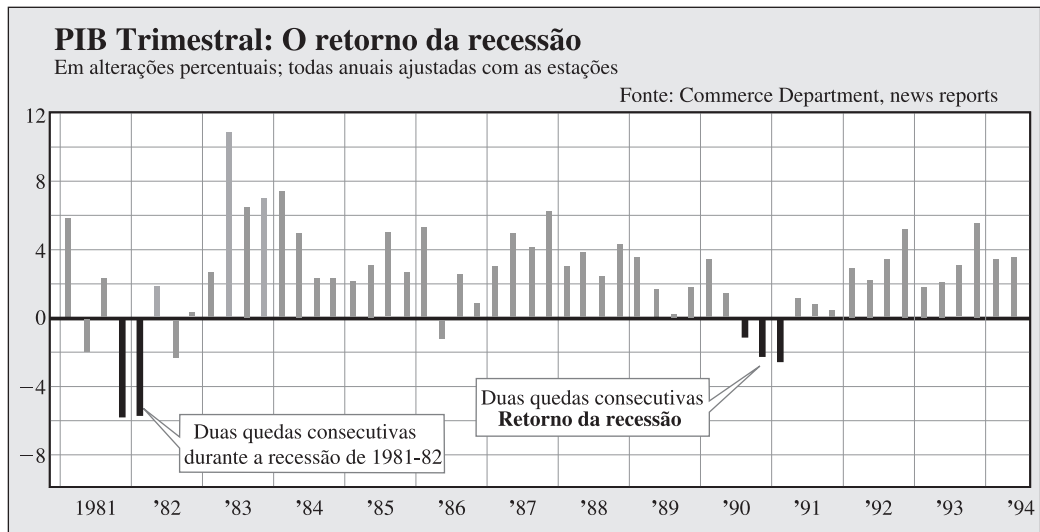
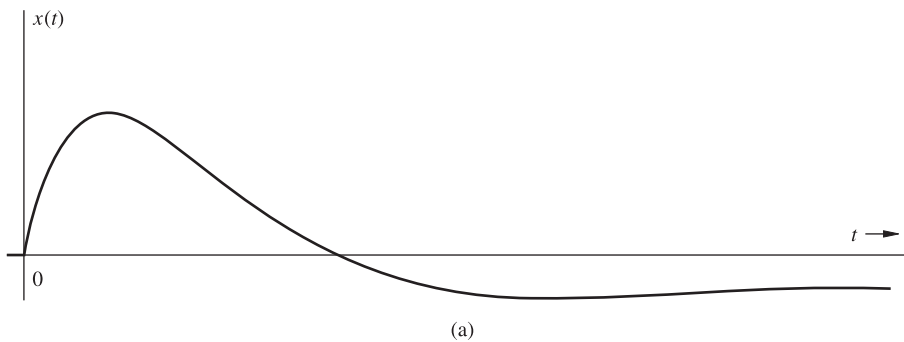


Figura 1.10 (a) Sinal contínuo no tempo e (b) sinal discreto no tempo.

1.3-2 Sinais Analógicos e Digitais

O conceito de tempo contínuo é geralmente confundido com o conceito de analógico. Os dois conceitos são diferentes. O mesmo é válido para os conceitos de tempo discreto e digital. Um sinal cuja amplitude pode assumir qualquer valor em uma faixa contínua é um *sinal contínuo*. Isto significa que a amplitude de um sinal analógico pode assumir infinitos valores. Um *sinal digital*, por outro lado, é aquele cuja amplitude pode assumir apenas alguns números finitos de valores. Sinais associados com um computador digital são digitais porque eles podem assumir apenas dois valores (sinais binários). Um sinal digital cuja amplitude pode assumir M valores é um sinal M -ário no qual o binário ($M = 2$) é um caso especial. Os termos *contínuo no tempo* e *discreto no tempo* qualificam a natureza do sinal ao longo do eixo de tempo (eixo horizontal). Os termos *analógico* e *digital*, por outro lado, qualificam a natureza da amplitude do sinal (eixo vertical). A Fig. 1.11 mostra exemplos de sinais de vários tipos. Fica claro que um sinal analógico não é necessariamente um sinal contínuo no tempo e que um sinal digital não é necessariamente um sinal discreto no tempo. A Fig. 1.11c mostra um exemplo de um sinal analógico discreto no tempo. Um sinal analógico pode ser convertido em um sinal digital [conversão analógico/digital (A/D)] através da quantização (arredondamento), como será explicado na Seção 8.3.

1.3-3 Sinais Periódicos e Não Periódicos

Um sinal $x(t)$ é dito *periódico* se para alguma constante positiva T_0

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{para todo } t \quad (1.17)$$

O menor valor de T_0 que satisfaz a condição de periodicidade da Eq. (1.17) é o *período fundamental* de $x(t)$. Os sinais das Figs. 1.2b e 1.3e são sinais periódicos com períodos 2 e 1, respectivamente. Um sinal é *não periódico* se ele não possui um período. Os sinais das Figs. 1.2a, 1.3a, 1.3b, 1.3c e 1.3d são todos não periódicos.

Pela definição, um sinal periódico $x(t)$ permanece não alterado quando deslocado no tempo por um período. Por esta razão, um sinal periódico deve começar em $t = -\infty$: se ele começar em algum instante de tempo finito, digamos $t = 0$, o sinal deslocado no tempo $x(t + T_0)$ começaria em $t = T_0$ e $x(t + T_0)$ não seria o mesmo que $x(t)$. Portanto, *um sinal periódico, por definição, deve começar em $t = -\infty$ e continuar para sempre, como mostrado na Fig. 1.12.*

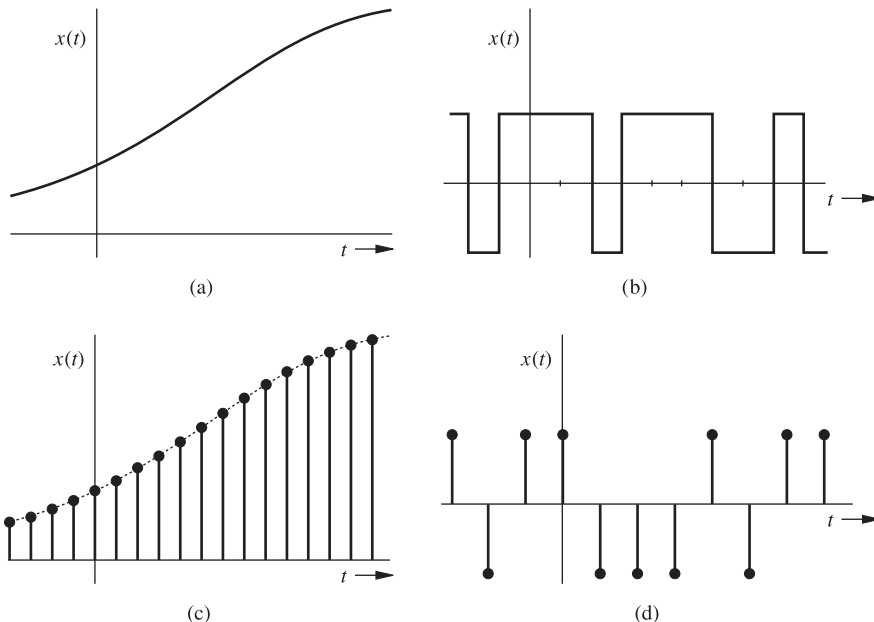


Figura 1.11 Exemplos de sinais: (a) analógico, contínuo no tempo, (b) digital, contínuo no tempo, (c) analógico, discreto no tempo e (d) digital, discreto no tempo.

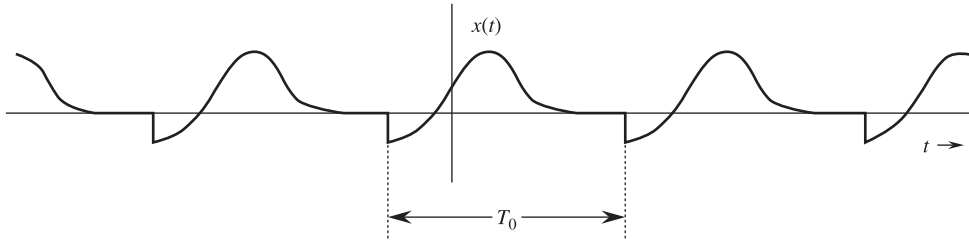


Figura 1.12 Um sinal periódico com período T_0 .

Outra propriedade importante de um sinal periódico $x(t)$ é que $x(t)$ pode ser gerado pela *extensão periódica* de qualquer segmento de $x(t)$ com duração T_0 (o período). Como resultado, podemos gerar $x(t)$ de qualquer segmento de $x(t)$ contendo a duração de um período colocando a reprodução ao final do segmento e continuando desta forma indefinidamente dos dois lados do segmento. A Fig. 1.13 mostra um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0 = 6$. A porção sombreada da Fig. 1.13a mostra um segmento de $x(t)$ começando em $t = -1$ e tendo a duração de um período (6 segundos). Esse segmento, quando repetido indefinidamente nas duas direções resulta no sinal periódico $x(t)$. A Fig. 1.13b mostra outro segmento sombreado de $x(t)$ com duração T_0 começando em $t = 0$. Novamente vemos que este segmento, quando repetido indefinidamente nos dois sentidos, resulta em $x(t)$. O leitor pode verificar que esta construção é possível com qualquer segmento de $x(t)$ começando em qualquer instante de tempo, desde que a duração do segmento seja de um período.

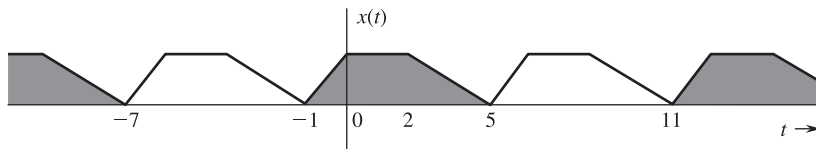
Uma propriedade útil adicional de um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 é que a área abaixo de $x(t)$ em qualquer intervalo de duração T_0 é sempre a mesma. Ou seja, para quaisquer números reais a e b

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt \tag{1.18}$$

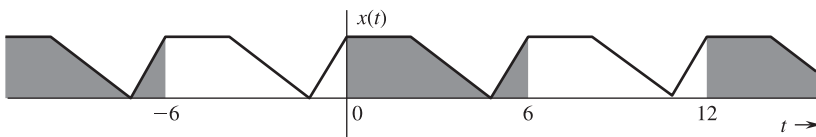
Esse resultado vem do fato de que um sinal periódico assume os mesmos valores em intervalos de T_0 . Logo, os valores em qualquer segmento de duração T_0 são repetidos em qualquer outro intervalo de mesma duração. Por conveniência, a área abaixo de $x(t)$ em qualquer intervalo de duração T_0 será representada por

$$\int_{T_0} x(t) dt$$

É útil identificar sinais que começam em $t = -\infty$ e continuam para sempre como *sinais de duração infinita*. Portanto, um sinal de duração infinita existe em todo o intervalo $-\infty < t < \infty$. Os sinais das Figs. 1.1b e 1.2b são exemplos de sinais de duração infinita. Claramente, um sinal periódico, por definição, é um sinal de duração infinita.



(a)



(b)

Figura 1.13 Geração de um sinal periódico através da extensão periódica de seu segmento com um período de duração.

Um sinal que não começar antes de $t = 0$ é um *sinal causal*. Em outras palavras, $x(t)$ é um sinal causal se

$$x(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1.19)$$

Os sinais da Fig. 1.3a-1.3c são sinais causais. Um sinal que começar antes de $t = 0$ é um *sinal não-causal*. Todos os sinais da Fig. 1.1 e 1.2 são não-causais. Observe que um sinal de duração infinita é sempre não causal, mas um sinal não causal não é necessariamente de duração infinita. O sinal de duração infinita da Fig. 1.2b é não causal, entretanto, o sinal não causal da Fig. 1.2a não é de duração infinita. Um sinal que é zero para todo $t \geq 0$ é chamado de *sinal anti-causal*.

Comentários. Um sinal de duração infinita verdadeiro não pode ser gerado na prática por razões óbvias. Por que devemos, então, nos preocupar em estudar tal sinal? Nos últimos capítulos veremos que certos sinais (por exemplo, um impulso e uma senóide de duração infinita) que não podem ser gerados na prática realmente são muito úteis no estudo de sinais e sistemas.

1.3-4 Sinais de Energia e Potência

Um sinal com energia finita é um *sinal de energia* e um sinal com potência não nula finita é um *sinal de potência*. Os sinais das Figs. 1.2a e 1.2b são exemplos de sinais de energia e potência, respectivamente. Observe que a potência é a média temporal da energia. Como a média é calculada em um intervalo infinitamente grande, um sinal com energia finita possui potência nula e um sinal com potência finita possui energia infinita. Portanto, um sinal não pode ser tanto de energia quanto de potência. Se ele for de um tipo, ele não pode ser do outro. Por outro lado, existem sinais que não são nem de energia nem de potência. O sinal em rampa é um desses casos.

Comentários. Todos os sinais práticos possuem energia finita e, portanto, são sinais de energia. Um sinal de potência deve necessariamente ter duração infinita, caso contrário sua potência, a qual é sua energia média em um intervalo de tempo infinitamente grande, não atingirá um limite (não nulo). Claramente, é impossível gerar um sinal puramente de potência na prática, pois tal sinal teria duração infinita e uma energia infinita.

Além disso, devido à repetição periódica, sinais periódicos, nos quais a área sob $|x(t)|^2$ em um período é finita, são sinais de potência. Entretanto, nem todos os sinais de potência são periódicos.

EXERCÍCIO E1.6

Mostre que a exponencial de duração infinita e^{-at} não é nem um sinal de energia nem de potência para qualquer valor real de a . Entretanto, se a for imaginário, ela é um sinal de potência por potência $P_x = 1$, independente do valor de a .

1.3-5 Sinais Determinísticos e Aleatórios

Um sinal cuja descrição física é completamente conhecida, seja na forma matemática ou na forma gráfica é um *sinal determinístico*. Um sinal cujos valores não podem ser preditos precisamente, mas são conhecidos apenas em termos de uma descrição probabilística, tal como o valor médio ou valor médio quadrático, são *sinais aleatórios*. Neste livro, trabalharemos exclusivamente com sinais determinísticos. Os sinais aleatórios estão além do escopo deste estudo.

1.4 ALGUNS MODELOS ÚTEIS DE SINAIS

Na área de sinais e sistemas, as funções degrau, impulso e exponencial possuem um papel muito importante. Elas não apenas servem como a base para a representação de outros sinais, mas também podem ser utilizadas para simplificar vários aspectos de sinais e sistemas.

1.4-1 Função Degrau Unitário $u(t)$

Em várias de nossas discussões, os sinais começam em $t = 0$ (sinais causais). Tais sinais podem ser convenientemente descritos em termos da função degrau unitário $u(t)$, mostrada na Fig. 1.14a. Esta função é definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

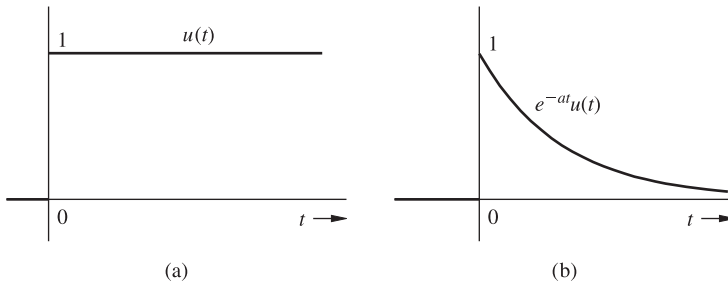


Figura 1.14 (a) Função degrau unitário $u(t)$. (b) Exponencial $e^{-at}u(t)$.

Se quisermos um sinal que comece em $t = 0$ (de tal forma que ele possua valor nulo para $t < 0$), precisamos apenas multiplicar o sinal por $u(t)$. Por exemplo, o sinal e^{-at} representa uma exponencial com duração infinita que começa em $t = -\infty$. A forma causal desta exponencial (Fig. 1.14b) pode ser descrita como $e^{-at}u(t)$.

A função degrau unitário também é muito útil para especificar uma função com diferentes descrições matemáticas em diferentes intervalos. Exemplos de tais funções são mostradas na Fig. 1.7. Essas funções possuem diferentes descrições matemáticas em diferentes segmentos de tempo, como visto nas Eqs. (1.14), (1.15a) e (1.15b). Tais descrições geralmente são trabalhosas e inconvenientes de serem matematicamente trabalhadas. Podemos utilizar a função degrau unitário para descrever tais funções por uma única expressão válida para todo t .

Considere, por exemplo, o pulso retangular mostrado na Fig. 1.15a. Podemos descrever este pulso em termos de funções degrau observando que o pulso $x(t)$ pode ser descrito como a soma de dois degraus unitários atrasados, como mostrado na Fig. 1.15b. A função degrau unitário $u(t)$ atrasada em T segundos é $u(t - T)$. A partir da Fig. 1.15b, é fácil ver que

$$x(t) = u(t - 2) - u(t - 4)$$

1.4-2 A Função Impulso Unitário $\delta(t)$

A função impulso unitário $\delta(t)$ é uma das mais importantes funções no estudo de sinais e sistemas. Esta função foi inicialmente definida por P. A. M. Dirac por

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \tag{1.21}$$

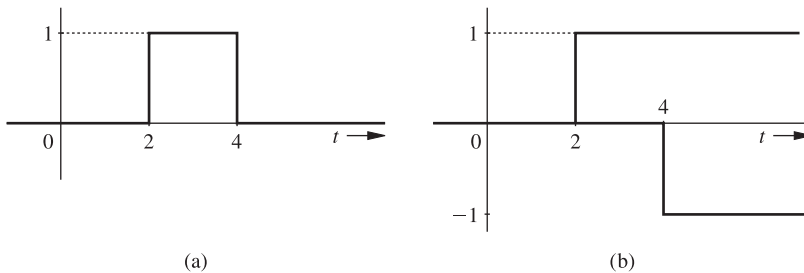


Figura 1.15 Representação de um pulso retangular através de funções degrau unitário.

EXEMPLO 1.6

Descreva o sinal da Fig. 1.16a.

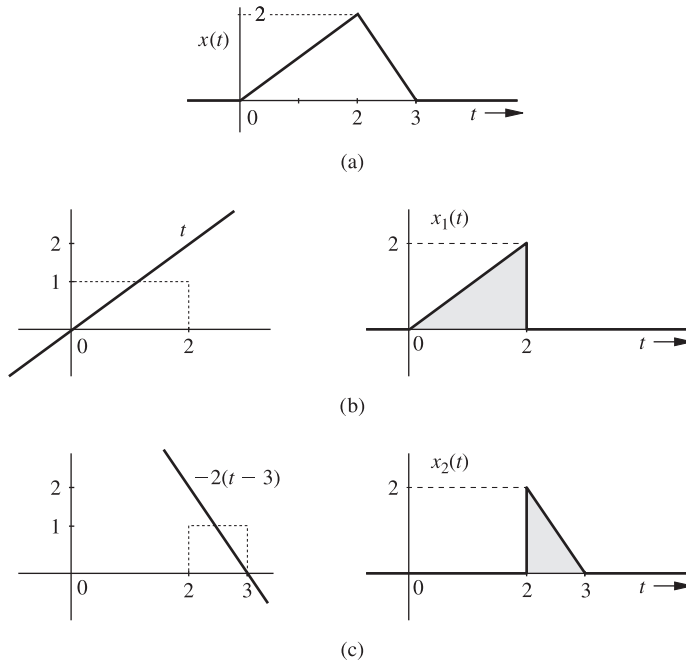


Figura 1.16 Representação de um sinal definido intervalo por intervalo.

O sinal ilustrado na Fig. 1.16a pode ser convenientemente trabalhado separando-o em duas componentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$, mostradas na Fig. 1.16b e 1.16c, respectivamente. Desta forma $x_1(t)$ pode ser obtido pela multiplicação da rampa t pelo pulso $u(t) - u(t - 2)$, como mostrado na Fig. 1.16b. Logo

$$x_1(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$$

O sinal $x_2(t)$ pode ser obtido pela multiplicação de outra rampa pelo pulso ilustrado na Fig. 1.16c. Esta rampa possui inclinação -2 , logo ela pode ser descrita por $-2t + c$. Agora, como a rampa possui valor zero para $t = 3$, então $c = 6$ e a rampa pode ser descrita por $-2(t - 3)$. Além disso, o pulso da Fig. 1.16c é $u(t - 2) - u(t - 3)$. Portanto,

$$x_2(t) = -2(t - 3)[u(t - 2) - u(t - 3)]$$

e

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= t[u(t) - u(t - 2)] - 2(t - 3)[u(t - 2) - u(t - 3)] \\ &= tu(t) - 3(t - 2)u(t - 2) + 2(t - 3)u(t - 3) \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.7

Descreva o sinal da Fig. 1.7a através de uma única expressão válida para todo t .

Considerando o intervalo de $-1,5$ a 0 , o sinal pode ser descrito pela constante 2 e para o intervalo de 0 a 3 , ele pode ser descrito por $2e^{-t/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{2[u(t + 1,5) - u(t)]}_{x_1(t)} + \underbrace{2e^{-t/2}[u(t) - u(t - 3)]}_{x_2(t)} \\ &= 2u(t + 1,5) - 2(1 - e^{-t/2})u(t) - 2e^{-t/2}u(t - 3) \end{aligned}$$

Compare esta expressão com a expressão para a mesma função encontrada na Eq. (1.14).

EXERCÍCIO E1.7

Mostre que os sinais apresentados na Fig. 1.17a e 1.17b podem ser descritos como $u(-t)$ e $e^{-at}u(-t)$, respectivamente.

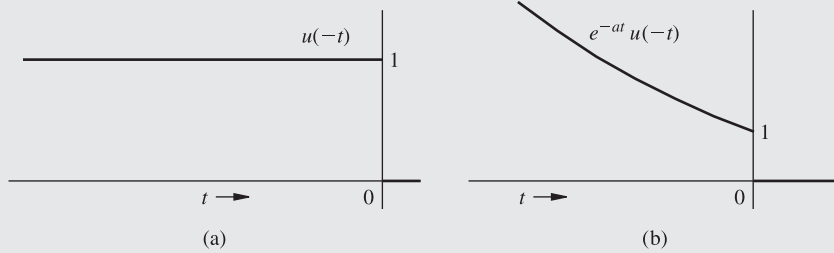


Figura 1.17

EXERCÍCIO E1.8

Mostre que o sinal da Fig. 1.18 pode ser descrito por

$$x(t) = (t - 1)u(t - 1) - (t - 2)u(t - 2) - u(t - 4)$$

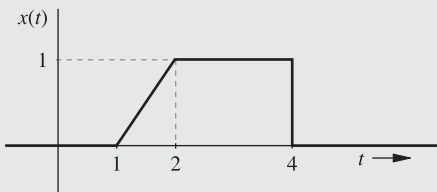


Figura 1.18

Podemos visualizar um impulso como um pulso retangular alto e estreito com área unitária, como ilustrado na Fig. 1.19b. A largura deste pulso retangular é um valor muito pequeno $\epsilon \rightarrow 0$. Conseqüentemente, sua altura é um valor muito grande $1/\epsilon \rightarrow \infty$. O impulso unitário pode, portanto, ser imaginado como um pulso retangular com largura infinitamente pequena e altura infinitamente grande e com uma área total que é mantida igual a um. Portanto, $\delta(t) = 0$ em todo tempo menos para $t = 0$, onde ele é indefinido. Por esta razão, um impulso unitário é representado pela seta da Fig. 1.9a.

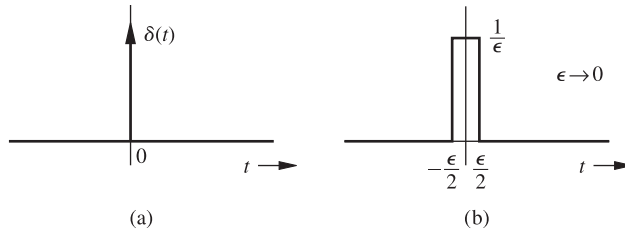


Figura 1.19 Um impulso unitário e sua aproximação.

Outros pulsos, tais como o exponencial, triangular ou Gaussiano também podem ser utilizados como uma aproximação do impulso. A característica importante da função impulso unitário não é sua forma, mas o fato de que sua duração efetiva (largura do pulso) tende para zero enquanto que a sua área permanece unitária. Por exemplo, o pulso exponencial $\alpha e^{-\alpha t} u(t)$ da Fig. 1.20a se torna alto e estreito quando α aumenta. No limite de $\alpha \rightarrow \infty$ a altura do pulso $\rightarrow \infty$ e sua largura ou duração $\rightarrow 0$. Ainda assim, a área debaixo do pulso é unitária, independente do valor assumido para α , pois

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 \tag{1.22}$$

Os pulsos da Fig. 1.20b e 1.20c possuem um comportamento similar. Obviamente, a função impulso exata não pode ser gerada na prática, ela pode apenas ser aproximada.

A partir da Eq. (1.21), temos que $k\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$ e sua área é k . Portanto, $k\delta(t)$ é uma função impulso cuja área é k (ao contrário da função impulso unitário, cuja área é 1).

MULTIPLICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO POR UM IMPULSO

Vamos considerar o que acontece quando multiplicamos o impulso unitário $\delta(t)$ por uma função $\phi(t)$ que sabemos ser contínua para $t = 0$. Como o impulso possui valor não nulo apenas para $t = 0$, e o valor $\phi(t)$ para $t = 0$ é $\phi(0)$, obtemos

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t) \tag{1.23a}$$

Portanto, a multiplicação de uma função contínua no tempo $\phi(t)$ pelo impulso unitário localizado em $t = 0$ resulta em um impulso, o qual é localizado em $t = 0$ e possui força $\phi(0)$ [o valor de $\phi(t)$ na localização do impulso]. O uso do mesmo argumento resulta na generalização deste resultado, afirmando que dada $\phi(t)$ contínua em $t = T$, $\phi(t)$ multiplicado por um impulso $\delta(t - T)$ (impulso localizado em $t = T$) resulta em um impulso localizado em $t = T$ e com força $\phi(T)$ [o valor de $\phi(t)$ na localização do impulso].

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T) \tag{1.23b}$$

PROPRIEDADE DE AMOSTRAGEM DA FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO

A partir da Eq. (1.23a), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt &= \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\ &= \phi(0) \end{aligned} \tag{1.24a}$$

desde que $\phi(t)$ seja contínua para $t = 0$. Este resultado significa que a área sob o produto de uma função com o impulso $\delta(t)$ é igual ao valor da função no instante no qual o impulso é localizado. Esta propriedade é muito importante e útil, sendo conhecida como *propriedade de amostragem* do impulso unitário.

Utilizando a Eq. (1.23b), temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T) \tag{1.24b}$$

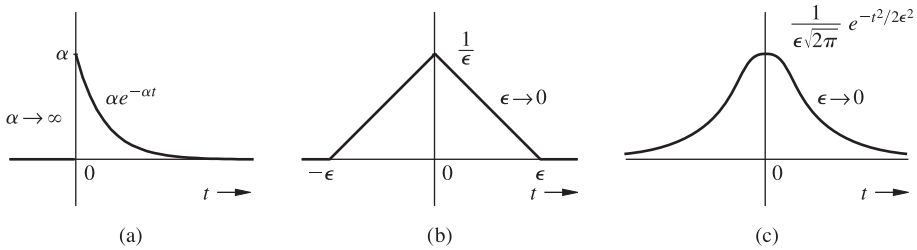


Figura 1.20 Outras possíveis aproximações do impulso unitário.

A Eq. (1.24b) é outra forma da propriedade de amostragem. No caso da Eq. (1.24b), o impulso $\delta(t - T)$ está localizado em $t = T$. Portanto, a área sob $\phi(t)\delta(t - T)$ é $\phi(T)$, o valor de $\phi(t)$ no instante no qual o impulso está localizado (para $t = T$). Na obtenção dessa equação, consideramos que a função é contínua no instante de localização do impulso.

IMPULSO UNITÁRIO COMO FUNÇÃO GENERALIZADA

A definição da função impulso unitário dada pela Eq. (1.21) não é matematicamente rigorosa, a qual resulta em sérias dificuldades. Inicialmente, a função impulso não define uma única função: por exemplo, pode ser mostrado que $\delta(t) + \dot{\delta}(t)$ também satisfaz a Eq. (1.21).¹ Além disso, $\delta(t)$ não é nem mesmo uma função verdadeira no sentido ordinário. Uma função ordinária é especificada por seus valores para todo o tempo t . A função impulso é zero em todo tempo exceto $t = 0$ e, mesmo na única parte interessante de sua faixa, ela é indefinida. Estas dificuldades são resolvidas pela definição do impulso como uma função generalizada no lugar de uma função ordinária. Uma *função generalizada* é definida por seu efeito em outras funções em vez de seus valores em todo instante de tempo.

Nessa abordagem, a função impulso é definida pela propriedade da amostragem [Eqs. (1.24)]. Desta forma não dizemos nada sobre o que é a função impulso ou como ela se parece. Em vez disso, a função impulso é definida em termos de seu efeito em uma função de teste $\phi(t)$. Definimos o impulso unitário como uma função na qual a área sob o seu produto com a função $\phi(t)$ é igual ao valor da função $\phi(t)$ no instante no qual o impulso está localizado. Assume-se que $\phi(t)$ é contínua na localização do impulso. Portanto, tanto a Eq. (1.24a) quanto a Eq. (1.24b) servem como definição da função impulso nesta abordagem. Lembre-se de que a propriedade de amostragem [Eqs. (1.24)] é consequência da definição clássica (Dirac) do impulso da Eq. (1.21). Em contraste, a *propriedade de amostragem [eqs.(1.24)] define a função impulso na abordagem de função generalizada*.

Agora, apresentaremos uma aplicação interessante da definição de função generalizada de um impulso. Como a função degrau unitário $u(t)$ é descontínua para $t = 0$, sua derivada du/dt não existe para $t = 0$ no sentido ordinário. Mostraremos, agora, que sua derivada existe no sentido generalizado e vale, de fato, $\delta(t)$. Como prova, vamos calcular a integral de $(du/dt)\phi(t)$, usando integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt} \phi(t) dt = u(t)\phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\dot{\phi}(t) dt \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} &= \phi(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} \dot{\phi}(t) dt \\ &= \phi(\infty) - \phi(t) \Big|_0^{\infty} \\ &= \phi(0) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Esse resultado mostra que du/dt satisfaz a propriedade de amostragem de $\delta(t)$. Portanto, ele é um impulso $\delta(t)$ no sentido generalizado, ou seja,

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \tag{1.27}$$

Conseqüentemente,

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \tag{1.28}$$

Esses resultados também podem ser obtidos graficamente a partir da Fig. 1.19b. Observe que a área de $-\infty$ a t sob o limite imposto por $\delta(t)$ da Fig. 1.19b é zero se $t < -\epsilon/2$ e unitário se $t \geq \epsilon/2$ com $\epsilon \rightarrow 0$. Conseqüentemente,

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

$$= u(t)$$

Esse resultado mostra que a função degrau unitário pode ser obtida integrando a função impulso unitário. Similarmente, a função rampa unitária $x(t) = tu(t)$ pode ser obtida integrando a função degrau unitário. Podemos continuar com a função parábola unitária $t^2/2$, obtida pela integração da rampa unitária e assim por diante. Por outro lado, temos as derivadas da função impulso, que podem ser definidas como funções generalizadas (veja o Problema 1.4-9). Todas essas funções, derivadas da função impulso unitário (sucessivas diferenciais e integrais) são chamadas de *funções de singularidade*.[†]

EXERCÍCIO E1.9

Mostre que

- (a) $(t^3 + 3)\delta(t) = 3\delta(t)$
- (b) $\left[\text{sen} \left(t^2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \delta(t) = -\delta(t)$
- (c) $e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$
- (d) $\frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 + 9} \delta(\omega - 1) = \frac{1}{5} \delta(\omega - 1)$

EXERCÍCIO E1.10

Mostre que

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2) \cos \left(\frac{\pi t}{4} \right) dt = 0$
- (c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)} \delta(2-t) dt = e^{-2(x-2)}$

1.4-3 Função Exponencial e^{st}

Outra importante função na área de sinais e sistemas é o sinal exponencial e^{st} , onde s é, geralmente, um número complexo, dado por

$$s = \sigma + j\omega$$

Logo,

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \text{sen } \omega t) \quad (1.30a)$$

[†] Funções de singularidade foram definidas pelo Prof. S. J. Mason como mostrado a seguir: Uma singularidade é um ponto no qual uma função não possui derivada. Cada uma das funções de singularidade (se não for a própria função, então a função diferenciada um número finito de vezes) possui um ponto singular na origem, sendo nula em todas as demais posições.²

Como $s^* = \sigma - j\omega$ (o conjugado de s), então

$$e^{s^*t} = e^{\sigma - j\omega} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t) \tag{1.30b}$$

e

$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) \tag{1.30c}$$

Comparando esta equação com a Fórmula de Euler vemos que e^{st} é a generalização da função $e^{j\omega t}$, na qual a variável de frequência $j\omega$ é generalizada para a variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Por esta razão, iremos chamar a variável s de *frequência complexa*. A partir das Eqs. (1.30), temos que a função e^{st} engloba uma grande classe de funções. As seguintes funções são um caso especial ou podem ser descritas em termos de e^{st} :

1. Uma constante $k = ke^{0t}$ ($s = 0$)
2. Uma exponencial monotônica $e^{\sigma t}$ ($\omega = 0, s = \sigma$)
3. Uma senóide $\cos \omega t$ ($\sigma = 0, s = \pm j\omega$)
4. Uma senóide variando exponencialmente $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma \pm j\omega$)

Essas funções estão mostradas na Fig. 1.21.

A frequência complexa s pode ser representada convenientemente em uma *plano de frequência complexa* (plano s), como mostrado na Fig. 1.22. O eixo horizontal é o eixo real (eixo σ) e o eixo vertical é o eixo imaginário (eixo $j\omega$). O valor absoluto da parte imaginária de s é $|\omega|$ (a frequência angular), a qual indica a frequência de oscilação de e^{st} . A parte real σ (frequência *neperiana*) possui informação sobre a taxa de crescimento ou decaimento (decaimento) da amplitude de e^{st} . Para sinais cuja frequência complexa está no eixo real (eixo σ , no qual $\omega = 0$), a frequência de oscilação é zero. Conseqüentemente, esses sinais são exponenciais monotonicamente crescentes ou decrescentes (Fig. 1.21a). Para sinais cuja frequência está no eixo imaginário (eixo $j\omega$, com $\sigma = 0$), $e^{st} = 1$. Portanto, esses sinais são senóides convencionais com amplitude constantes (Fig. 1.21b). O caso $s = 0$ ($\omega = \sigma = 0$) corresponde a um sinal constante (CC) pois $e^{0t} = 1$. Para os sinais ilustrados na Fig. 1.21c e 1.21d, tanto σ quanto ω são não nulos, e a frequência s é complexa e não está sobre nenhum eixo. O sinal da Fig. 1.21c decai exponencialmente. Portanto, σ é negativo e s está a esquerda do eixo imaginário. Em contrapartida, o sinal da Fig. 1.21d cresce exponencialmente, logo σ é positivo e s está no lado direito do eixo imaginário. Portanto, o plano s (Fig. 1.22) pode ser separado em duas partes: o semi-plano esquerdo (SPE), correspondendo a sinais exponencialmente decrescentes, e o semi-plano direito (SPD), correspondendo a sinais exponencialmente crescentes. O eixo imaginário divide as duas regiões e corresponde a sinais de amplitude constante.

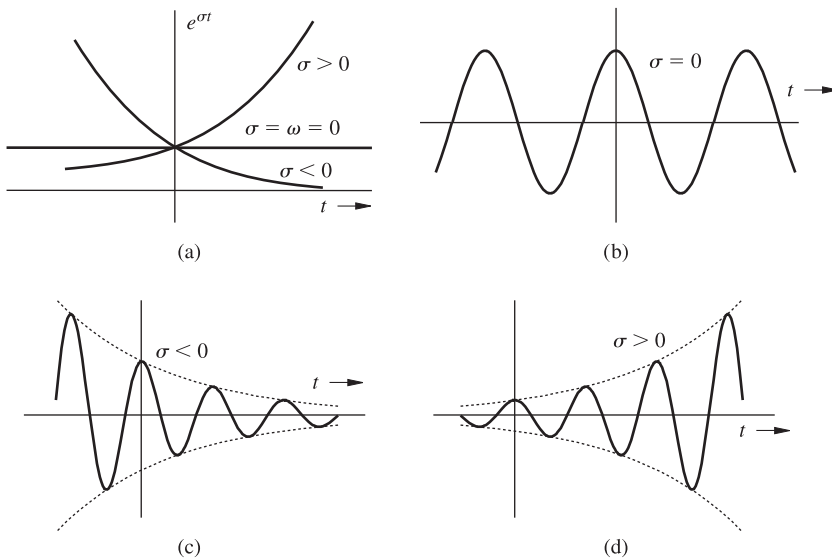


Figura 1.21 Senóides de frequência complexa $s = \sigma + j\omega$.

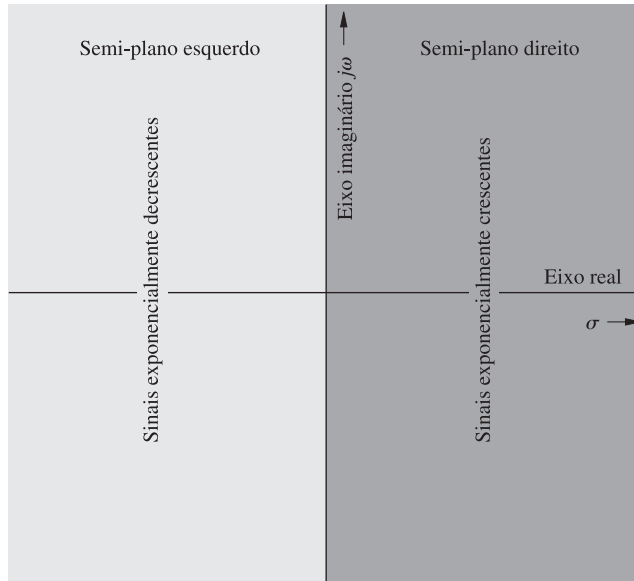


Figura 1.22 Plano da frequência complexa.

Uma senóide exponencialmente crescente $e^{2t} \cos 5t$, por exemplo, pode ser descrita como uma combinação linear das exponenciais $e^{(2+j5)t}$ e $e^{(2-j5)t}$ com frequências complexas $2 + j5$ e $2 - j5$, respectivamente, as quais estão no SPD. A senóide exponencialmente decrescente $e^{-2t} \cos 5t$ pode ser descrita pela combinação linear das exponenciais $e^{-(2+j5)t}$ e $e^{-(2-j5)t}$ com frequências complexas $-2 + j5$ e $-2 - j5$, respectivamente, as quais estão no SPE. A senóide com amplitude constante $\cos 5t$ pode ser expressa como a combinação linear das exponenciais e^{j5t} e e^{-j5t} com frequências complexas $\pm j5$, as quais estão sobre o eixo imaginário. Observe que exponenciais monotônicas $e^{\pm 2t}$ também são senóides generalizadas com frequências complexas ± 2 .

1.5 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Uma função real $x_e(t)$ é dita ser uma *função par* de t se [†]

$$x_e(t) = x_e(-t) \tag{1.31}$$

e uma função real $x_o(t)$ é dita ser uma *função ímpar* de t se

$$x_o(t) = -x_o(-t) \tag{1.32}$$

Uma função par possui o mesmo valor para os instantes t e $-t$ para todos os valores de t . Claramente, $x_e(t)$ é simétrico com relação ao eixo vertical, como mostrado na Fig. 1.23a. Por outro lado, o valor de uma função ímpar no instante t é o negativo de seu valor no instante $-t$. Portanto, $x_o(t)$ é anti-simétrico com relação ao eixo vertical, como ilustrado na Fig. 1.23b.

1.5-1 Algumas Propriedades de Funções Pares e Ímpares

As funções pares e ímpares possuem as seguintes propriedades:

- função par \times função ímpar = função ímpar
- função ímpar \times função ímpar = função par
- função par \times função par = função par

[†] Um sinal complexo $x(t)$ é dito ser *conjugado simétrico* se $x(t) = x^*(-t)$. Um sinal conjugado simétrico real é um sinal par. Um sinal é *conjugado anti-simétrico* se $x(t) = -x^*(-t)$. Um sinal conjugado anti-simétrico real é um sinal ímpar.

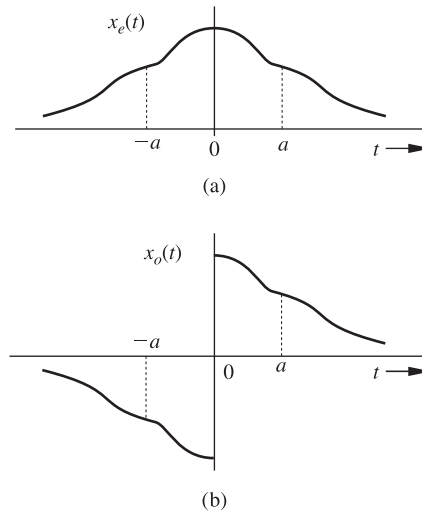


Figura 1.23 Funções de t : (a) função par e (b) função ímpar.

As provas são triviais e seguem diretamente da definição de funções ímpares e pares [Eqs. (1.31) e (1.32)].

ÁREA

Como $x_e(t)$ é simétrica com relação ao eixo vertical, a partir da Fig. 1.23a, temos

$$\int_{-a}^a x_e(t) dt = 2 \int_0^a x_e(t) dt \tag{1.33a}$$

Também é claro a partir da Fig. 1.23b que

$$\int_{-a}^a x_o(t) dt = 0 \tag{1.33b}$$

Esses resultados são válidos se considerarmos que não existe um impulso (ou suas derivadas) na origem. A prova destas afirmativas é óbvia a partir dos gráficos das funções par e ímpar. A prova formal, deixada como um exercício para o leitor, pode ser obtida usando as definições das Eqs. (1.31) e (1.32).

Em função de suas propriedades, o estudo de funções ímpares e pares se mostra útil em diversas aplicações, como será evidente nos capítulos seguintes.

1.5-2 Componentes Pares e Ímpares de um Sinal

Todo sinal $x(t)$ pode ser descrito como a soma de componentes pares e ímpares pois

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{\text{ímpar}} \tag{1.34}$$

A partir das definições das Eqs. (1.31) e (1.32), podemos ver claramente que a primeira componente do lado direito é uma função par, enquanto que a segunda componente é ímpar. Isso é evidente pois a substituição de t por $-t$ na primeira componente resulta na mesma função. O mesmo artifício na segunda componente resulta no negativo da componente.

Considere a função

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

Escrevendo essa função como a soma de componentes pares e ímpares $x_e(t)$ e $x_o(t)$, obtemos

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

onde [a partir da Eq. (1.34)]

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)] \quad (1.35a)$$

e

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \quad (1.35b)$$

A função $e^{-at}u(t)$ e suas componentes pares e ímpares são mostradas na Fig. 1.24

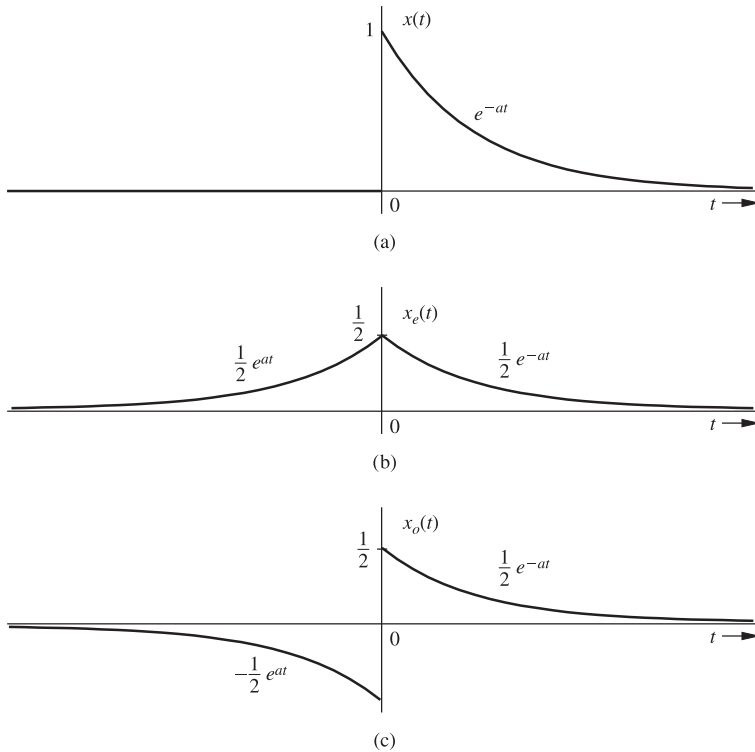


Figura 1.24 Determinação das componentes pares e ímpares de um sinal.

EXEMPLO 1.8

Determine as componentes pares e ímpares de e^{jt} .

A partir da Eq. (1.34)

$$e^{jt} = x_e(t) + x_o(t)$$

onde

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[e^{jt} + e^{-jt}] = \cos t$$

e

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[e^{jt} - e^{-jt}] = j \sen t$$

1.6 SISTEMAS

Como mencionado na Seção 1.1, sistemas são utilizados para processar sinais para permitir modificação ou extração de informação adicional dos sinais. Um sistema pode ser constituído por componentes físicos (implementação em *hardware*) ou pode ser um algoritmo que calcula o sinal de saída a partir de um sinal de entrada (implementação em *software*).

Falando genericamente, um sistema físico é constituído por componentes interconectados, os quais são caracterizados por sua relação terminal (entrada/saída). Além disso, o sistema é governado pelas leis de interconexão. Por exemplo, em sistemas elétricos, as relações terminais são as relações tensão/corrente que conhecemos para resistores, capacitores, indutores, transformadores, transistores e assim por diante, além das leis de interconexão (por exemplo, leis de Kirchhoff). Usando estas leis, podemos determinar equações matemáticas relacionando as saídas às entradas. Estas equações, então, representam o *modelo matemático* do sistema.

Um sistema pode ser convenientemente ilustrado por uma “caixa preta”, como um conjunto de terminais acessíveis nos quais as variáveis de entrada $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t)$ são aplicadas e outro conjunto de terminais acessíveis nos quais as variáveis de saída $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ são observadas (Fig. 1.25).

O estudo de sistemas consiste em três grandes áreas: modelagem matemática, análise e projeto. Apesar de estarmos trabalhando com modelagem matemática, nosso objetivo principal está na análise e projeto. A maior parte deste livro é dedicada ao problema de análise – como determinar as saídas do sistema para dadas entradas, dado o modelo matemático do sistema (ou regras que governam o sistema). Em uma proporção menor, também iremos considerar o problema de projeto ou síntese – como construir um sistema que irá produzir um determinado conjunto de saídas de dadas entradas.

DADOS NECESSÁRIOS PARA DETERMINAR A RESPOSTA DO SISTEMA

Para compreender quais dados são necessários para calcular a resposta de um sistema, considere um circuito *RC* simples com uma fonte de corrente $x(t)$ como entrada (Fig. 1.26). A tensão de saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1.36a)$$

Os limites de integração do lado direito são de $-\infty$ a t , pois essa integral representa a carga do capacitor devido ao fluxo da corrente $x(t)$ no capacitor e sua carga é o resultado da corrente fluindo no capacitor desse $-\infty$. Dessa forma, a Eq. (1.36a) pode ser escrita como

$$y(t) = Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 x(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (1.36b)$$

O termo médio do lado direito é $v_C(0)$, a tensão do capacitor para $t = 0$. Portanto,

$$y(t) = v_C(0) + Rx(t) + \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau \quad t \geq 0 \quad (1.36c)$$

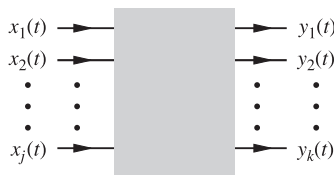


Figura 1.25 Representação de um sistema.

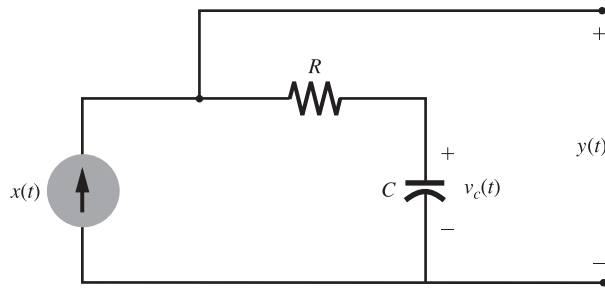


Figura 1.26 Exemplo de um sistema elétrico simples.

Essa equação pode ser facilmente generalizada para

$$y(t) = v_C(t_0) + Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \quad t \geq t_0 \quad (1.36d)$$

A partir da Eq. (1.36a), a tensão de saída $y(t)$ no instante t pode ser calculada se soubermos a corrente de entrada fluindo no capacitor durante todo o seu passado ($-\infty$ a t). Alternativamente, se soubermos a corrente de entrada $x(t)$ em algum momento t_0 , então ainda podemos calcular $y(t)$ para $t \geq t_0$ a partir do conhecimento da corrente de entrada, desde que saibamos $v_C(t_0)$, a tensão inicial do capacitor (tensão em t_0). Portanto $v_C(t_0)$ contém toda informação relevante sobre todo o passado do circuito ($-\infty$ a t_0) que precisamos para calcular $y(t)$ para $t \geq t_0$. Dessa forma, a resposta do sistema para $t \geq t_0$ pode ser determinada de sua entrada(s) durante o intervalo para t_0 a t e de certas *condições iniciais* em $t = t_0$.

No exemplo anterior, precisamos de apenas uma condição inicial. Entretanto, em sistemas mais complexos, várias condições iniciais podem ser necessárias. Sabemos, por exemplo, que em circuitos *RLC* passivos, os valores iniciais de todas as correntes nos indutores e todas as tensões nos capacitores[†] são necessárias para determinar a saída em qualquer instante $t \geq 0$ se as entradas forem fornecidas no intervalo $[0, t]$.

1.7 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Os sistemas podem ser classificados genericamente nas seguintes categorias:

1. Sistemas lineares e não lineares
2. Sistemas com parâmetros constantes ou com parâmetros variando no tempo
3. Sistemas instantâneos (sem memória) ou dinâmicos (com memória)
4. Sistemas causais ou não causais
5. Sistemas contínuos ou discretos no tempo
6. Sistemas analógicos ou digitais
7. Sistemas inversíveis ou não inversíveis
8. Sistemas estáveis ou instáveis

Outras classificações, tais como sistemas determinísticos e probabilísticos, estão além do escopo deste livro e não serão consideradas.

1.7-1 Sistemas Lineares e Não Lineares

CONCEITO DE LINEARIDADE

Um sistema cuja saída seja proporcional a sua entrada é um *exemplo* de um sistema linear. Mas a linearidade implica em mais do que isto, ela também implica a *propriedade aditiva*. Ou seja, se várias entradas estão atuando em um

[†] Falando estritamente, isso implica correntes de indutores independentes e tensões de capacitores independentes.

sistema, então o efeito total no sistema devido a todas estas entradas pode ser determinado considerando uma entrada por vez e assumindo todas as outras entradas iguais a zero. O efeito total é, então, a soma de todas as componentes de efeito. Esta propriedade pode ser descrita por: para um sistema linear, se uma entrada x_1 está atuando sozinha e possui efeito y_1 , e se outra entrada x_2 também atua sozinha e possui efeito y_2 , então, quando as duas entradas estiverem atuando no sistema, o efeito total será $y_1 + y_2$. Portanto, se

$$x_1 \longrightarrow y_1 \quad \text{e} \quad x_2 \longrightarrow y_2 \quad (1.37)$$

então, para todo x_1 e x_2

$$x_1 + x_2 \longrightarrow y_1 + y_2 \quad (1.38)$$

Além disso, um sistema linear deve satisfazer a propriedade de *homogeneidade* ou escalamento, a qual afirma que para uma número real ou imaginário arbitrário k , se uma entrada aumentar k vezes, seu efeito também aumentará k vezes. Portanto, se

$$x \longrightarrow y$$

então para todo k real ou imaginário

$$kx \longrightarrow ky \quad (1.39)$$

Logo, a linearidade implica duas propriedades: homogeneidade (escalamento) e aditividade.[†] As duas propriedades podem ser combinadas em uma única propriedade (*superposição*), a qual é descrita como mostrado a seguir. Se,

$$x_1 \longrightarrow y_1 \quad \text{e} \quad x_2 \longrightarrow y_2$$

então para todos os valores de constantes k_1 e k_2 ,

$$k_1x_1 + k_2x_2 \longrightarrow k_1y_1 + k_2y_2 \quad (1.40)$$

Essa equação é válida para todo x_1 e x_2 .

Podem parecer que a aditividade implica a homogeneidade. Infelizmente, a homogeneidade nem sempre é consequência da aditividade. O Exercício E1.11 demonstrará este caso.

EXERCÍCIO E1.11

Mostre que um sistema com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ relacionadas por $y(t) = Re\{x(t)\}$ satisfaz a propriedade de aditividade mas viola a propriedade de homogeneidade. Logo, tal sistema é não linear. [Dica: Mostre que a Eq. (1.39) não é satisfeita quando k é complexo.]

RESPOSTA DE UM SISTEMA LINEAR

Por questões de simplicidade, iremos discutir apenas sistemas *SISO* (*single-input, single-output**). Mas a discussão pode ser facilmente estendida para sistemas *MIMO* (*multiple-input, multiple-output***).

A saída de um sistema para $t \geq 0$ é o resultado de duas causas independentes: a condição inicial do sistema (ou o estado do sistema) para $t = 0$ e a entrada $x(t)$ para $t \geq 0$. Se um sistema é linear, a saída deve ser a soma das suas componentes resultantes destas duas causas: primeiro, a componente de *resposta a entrada nula* que resulta somente das condições iniciais para $t = 0$ com a entrada $x(t) = 0$ para $t \geq 0$ e, então, a componente de *resposta a estado nulo* que resulta apenas da entrada $x(t)$ para $t \geq 0$ quando as condições iniciais (para $t = 0$) são consideradas iguais a zero. Quando todas as condições iniciais apropriadas são nulas, o sistema é dito estar em *estado nulo*. A saída do sistema é nula quando a entrada é nula somente se o sistema estiver no estado nulo.

[†] Um sistema linear também deve satisfazer a condição adicional de *suavidade*, onde pequenas alterações nas entradas do sistema resultam em pequenas alterações em suas saídas.³

* N. de T.: Única entrada, única saída. Apesar de haver uma tradução para o termo, encontra-se mais freqüentemente, na literatura, o termo em inglês, o qual será adotado neste livro.

** N. de T.: Várias entradas, várias saídas. Apesar de haver uma tradução para o termo, encontra-se mais freqüentemente, na literatura, o termo em inglês, o qual será adotado neste livro.

Em resumo, a resposta de um sistema linear pode ser expressa como a soma das componentes de entrada nula e estado nulo:

$$\text{resposta total} = \text{resposta entrada nula} + \text{resposta estado nulo} \quad (1.41)$$

Essa propriedade de sistemas lineares, a qual permite a separação de uma saída em componentes resultantes das condições iniciais e da entrada, é chamada de *propriedade de decomposição*.

Para o circuito RC da Fig. 1.26, a resposta $y(t)$ foi determinada como sendo [veja Eq. (1.36c)]

$$y(t) = \underbrace{v_C(0)}_{\text{componente entrada nula}} + \underbrace{Rx(t) + \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau}_{\text{componente estado nulo}} \quad (1.42)$$

A partir da Eq. 1.42, fica claro que se a entrada $x(t) = 0$ para $t \geq 0$, a saída será $y(t) = v_C(0)$. Logo $v_C(0)$ é a componente de entrada nula da resposta $y(t)$. Similarmente, se o estado do sistema (a tensão v_C neste caso) for zero para $t = 0$, a saída é dada pela segunda componente do lado direito da Eq. (1.42). Claramente, esta é a componente de estado nulo da resposta $y(t)$.

Além da propriedade de decomposição, a linearidade implica que tanto a componente de entrada nula quanto o estado nulo devem obedecer o princípio da superposição com relação a cada uma das respectivas causas. Por exemplo, se aumentarmos a condição inicial k vezes, a componente de entrada nula deve aumentar também k vezes. Similarmente, se aumentarmos a entrada k vezes, a componente de estado nulo deve aumentar também k vezes. Esses fatos são facilmente verificados a partir da Eq. (1.42) para o circuito RC da Fig. 1.26. Por exemplo, se dobrarmos a condição inicial $v_C(0)$, a componente de entrada nula também dobra. Se dobrarmos a entrada $x(t)$, a componente de estado nulo também dobrará.

EXEMPLO 1.9

Mostre que o sistema descrito pela equação

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (1.43)$$

é linear.[†]

Seja a resposta do sistema às entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, respectivamente. Então

$$\frac{dy_1}{dt} + 3y_1(t) = x_1(t)$$

e

$$\frac{dy_2}{dt} + 3y_2(t) = x_2(t)$$

multiplicando a primeira equação por k_1 , a segunda por k_2 e somando os resultados teremos

$$\frac{d}{dt}[k_1y_1(t) + k_2y_2(t)] + 3[k_1y_1(t) + k_2y_2(t)] = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$$

[†] Equações tais como (1.43) e (1.44) são consideradas para representar sistemas lineares na definição clássica de linearidade. Alguns autores consideram tais equações para representar sistemas *incrementalmente lineares*. De acordo com esta definição, um *sistema linear* possui apenas a componente de estado nulo. A componente de entrada nula é ausente. Logo, a resposta de um sistema incrementalmente linear pode ser representada como a resposta de um sistema linear (linear nesta nova definição) mais a componente de entrada nula. Preferimos a definição clássica a esta nova definição. Isso é somente uma questão de definição e não afeta o resultado final.