

0

ANTES DO CÁLCULO



© Arco Images/Alamy

O desenvolvimento do Cálculo nos séculos XVII e XVIII foi motivado pela necessidade de entender fenômenos físicos como as marés, as fases da Lua, a natureza da luz e a gravidade.

Um dos temas mais importantes do Cálculo é a análise das relações entre quantidades físicas ou matemáticas. Tais relações podem ser descritas em termos de gráficos, fórmulas, dados numéricos ou palavras. Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de “função”, que é a ideia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como são expressas. Estudaremos as propriedades de algumas das funções mais básicas que ocorrem no Cálculo, incluindo as funções polinomiais, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais e logarítmicas.

0.1 FUNÇÕES

Nesta seção, definiremos e desenvolveremos o conceito de “função”, que é o objeto matemático básico utilizado por cientistas e matemáticos para descrever relações entre quantidades variáveis. As funções desempenham um papel central no Cálculo e em suas aplicações.

■ DEFINIÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Muitas leis científicas e muitos princípios de Engenharia descrevem como uma quantidade depende de outra. Em 1673, essa ideia foi formalizada por Leibniz, que cunhou o termo *função* para indicar a dependência de uma quantidade em relação a uma outra, conforme a definição a seguir.

0.1.1 DEFINIÇÃO Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y , então dizemos que y é uma função de x .

Quatro maneiras usuais de representar funções são:

- Numericamente com tabelas
- Geometricamente com gráficos
- Algebricamente com fórmulas
- Verbalmente

Tabela 0.1.1

VELOCIDADES DE QUALIFICAÇÃO
NAS 500 MILHAS DE INDIANÁPOLIS

ANO t	VELOCIDADE S (milhas/hora)
1994	228,011
1995	231,604
1996	233,100
1997	218,263
1998	223,503
1999	225,179
2000	223,471
2001	226,037
2002	231,342
2003	231,725
2004	222,024
2005	227,598
2006	228,985
2007	225,817
2008	226,366
2009	224,864
2010	227,970
2011	227,472

O método de representação muitas vezes depende de como surgiu a função. Por exemplo:

- A Tabela 0.1.1 mostra a velocidade de qualificação S para a *pole* na corrida de 500 milhas de Indianápolis como uma função do ano t . Há exatamente um valor de S para cada valor de t .
- A Figura 0.1.1 é um registro gráfico de um terremoto feito por um sismógrafo. O gráfico descreve a deflexão D da agulha do sismógrafo como uma função do tempo T decorrido desde o instante em que o abalo deixou o epicentro do terremoto. Há exatamente um valor de D para cada valor de T .
- Algumas das mais conhecidas funções surgem de fórmulas; por exemplo, a fórmula $C = 2\pi r$ expressa o comprimento da circunferência C de um círculo como uma função do raio r do círculo. Há exatamente um valor de C para cada valor de r .
- Algumas vezes, as funções são descritas em palavras. Por exemplo, a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton é, frequentemente, enunciada da seguinte forma: a força gravitacional de atração entre dois corpos no Universo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Esta é a descrição verbal da fórmula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

a qual F é a força de atração, m_1 e m_2 são as massas, r é a distância entre os corpos e G é uma constante. Se as massas são constantes, então a descrição verbal define F como uma função de r . Há exatamente um valor de F para cada valor de r .

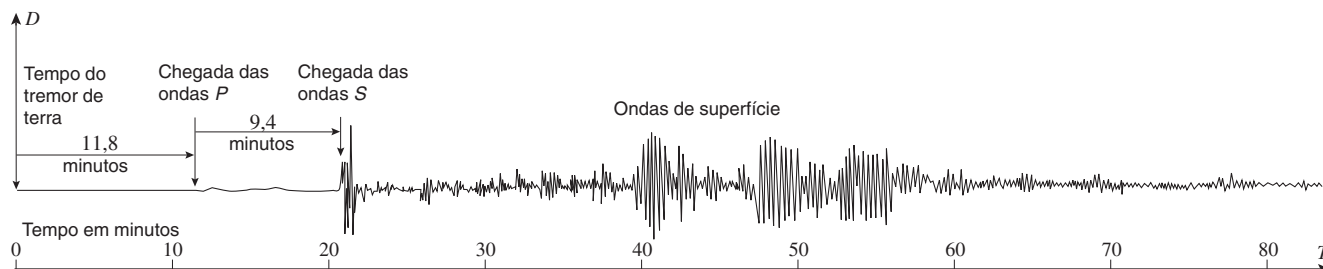


Figura 0.1.1

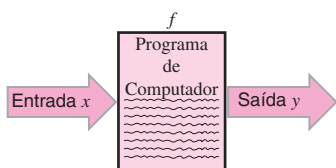


Figura 0.1.2

Na metade do século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (pronuncia-se “oiler”) concebeu a ideia de denotar funções pelas letras do alfabeto, tornando possível, desse modo, trabalhar com funções sem apresentar fórmulas específicas, gráficos ou tabelas. Para entender a ideia de Euler, pense numa função como sendo um programa de computador que toma uma *entrada* x , opera com ela de alguma forma e produz exatamente uma *saída* y . O programa de computador é um objeto por si só, assim podemos dar-lhe um nome, digamos f . Dessa forma, a função f (o programa de computador) associa uma única saída y a cada entrada x (Figura 0.1.2). Isso sugere a definição a seguir.

0.1.2 DEFINIÇÃO Uma **função** f é uma regra que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for denotada por x , então a saída é denotada por $f(x)$ (leia-se “ f de x ”).

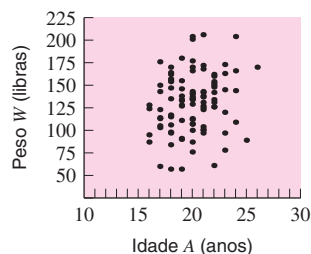


Figura 0.1.3

Nessa definição, o termo *única* significa “exatamente uma”. Assim, uma função não pode produzir duas saídas diferentes com a mesma entrada. Por exemplo, a Figura 0.1.3 mostra um gráfico de dispersão de pesos *versus* idade para uma amostra aleatória de 100 estudantes universitários. Esse gráfico de dispersão *não* descreve o peso W como uma fun-

ção da idade A , pois há alguns valores de A com mais de um valor correspondente de W . Isso é esperado, uma vez que duas pessoas com a mesma idade não têm, necessariamente, o mesmo peso.

■ VARIÁVEIS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Para uma dada entrada x , a saída de uma função f é denominada **valor** de f em x , ou **imagem** de x por f . Muitas vezes, denotamos a saída de uma função por uma letra, digamos y , e escrevemos

$$y = f(x)$$

Essa equação expressa y como uma função de x ; a variável x é denominada **variável independente** (ou **argumento**) de f , e a variável y é denominada **variável dependente** de f . Essa terminologia tem o objetivo de sugerir que x está livre para variar, mas, uma vez dado um valor específico para x , o valor correspondente de y está determinado. Por enquanto, consideramos apenas funções em que as variáveis independente e dependente são números reais, caso em que dizemos que f é uma **função real de uma variável real**. Adiante consideraremos outros tipos de funções.

Tabela 0.1.2

x	0	1	2	3
y	3	4	-1	6

► **Exemplo 1** A Tabela 0.1.2 descreve uma relação funcional $y = f(x)$ em que

$$f(0) = 3 \quad \text{f associa } y = 3 \text{ a } x = 0$$

$$f(1) = 4 \quad \text{f associa } y = 4 \text{ a } x = 1$$

$$f(2) = -1 \quad \text{f associa } y = -1 \text{ a } x = 2$$

$$f(3) = 6 \quad \text{f associa } y = 6 \text{ a } x = 3 \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 2** A equação

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

está na forma $y = f(x)$ em que a função f é dada pela fórmula

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$



Leonhard Euler (1707-1783) Euler foi, provavelmente, o mais prolífico de todos os matemáticos. Foi dito que “Euler fazia matemática tão facilmente quanto a maioria dos homens respira”. Ele nasceu em Basiléia, Suíça, e era filho de um ministro protestante, o qual, por sua vez, já estudara Matemática. O gênio de Euler se desenvolveu cedo. Ele

frequentou a Universidade de Basiléia e, aos 16 anos, obteve simultaneamente os títulos de Bacharel em Artes e Mestre em Filosofia. Enquanto estava em Basiléia, teve a sorte de ser orientado um dia por semana pelo notável matemático Johann Bernoulli. Sob a pressão do pai, começou a estudar Teologia. Contudo, o fascínio pela Matemática era muito grande e, aos 18 anos, começou a pesquisar. Não obstante, a influência do pai era muito forte, e seus estudos teológicos persistiram; assim, por toda a vida Euler foi profundamente religioso e simples. Em períodos diferentes, lecionou na Academia de Ciências de São Petersburgo (Rússia), na Universidade de Basiléia e na Academia de Ciências de Berlim. A energia e a capacidade de trabalho de Euler eram praticamente ilimitadas. Seus trabalhos acumulados formam mais de 100 volumes in-quarto (folha de papel dobrada duas vezes) e acredita-se que

muito de seu trabalho tenha sido perdido. É particularmente espantoso que nos últimos 17 anos de sua vida, quando mais produziu, estava cego! A memória impecável de Euler era fenomenal. Mais cedo em sua vida, memorizou a *Eneida* de Virgílio e, com 70 anos, era capaz de recitar a obra inteira. Além disso, podia dar a primeira e a última sentença de cada página do livro memorizado. Sua habilidade em resolver problemas de cabeça era inacreditável. Ele solucionava de cabeça grandes problemas do movimento lunar que frustravam Isaac Newton e, em certa ocasião, fez um complicado cálculo de cabeça para encerrar uma discussão entre dois estudantes, cujos cálculos diferiam na quinquagésima casa decimal.

A partir de Leibniz e Newton, os resultados em Matemática se desenvolveram rápida e desordenadamente. O gênio de Euler deu uma coerência à paisagem Matemática. Ele foi o primeiro matemático a trazer toda a força do Cálculo para resolver problemas da Física. Fez contribuições importantes a praticamente todos os ramos da Matemática, bem como à teoria da óptica, dos movimentos planetários, da eletricidade, do magnetismo e da mecânica geral.

[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png]

Para cada entrada x , a saída correspondente y é obtida substituindo x nessa fórmula. Por exemplo,

$$f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 2 = 2$$

f associa $y = 2$ a $x = 0$

$$f(-1,7) = 3(-1,7)^2 - 4(-1,7) + 2 = 17,47$$

f associa $y = 17,47$ a $x = -1,7$

$$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

f associa $y = 8 - 4\sqrt{2}$ a $x = \sqrt{2}$ ◀

A Figura 0.1.4 mostra apenas partes dos gráficos. Quando for o caso, e a menos de indicação em contrário, deve ser entendido que os gráficos exibidos neste texto se estendem indefinidamente para além das margens da figura dada.

Como $\sqrt{x}$ é imaginário para valores negativos de x , não há pontos no gráfico de $y = \sqrt{x}$ na região em que $x < 0$.

■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Se f for uma função de uma variável real a valores reais, então o **gráfico** de f no plano xy é definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x$ é o gráfico da equação $y = x$ que aparece na Figura 0.1.4. Essa figura também mostra os gráficos de algumas outras funções básicas, possivelmente conhecidos. No Apêndice A, vamos discutir técnicas para a construção de gráficos de funções usando computadores e calculadoras.

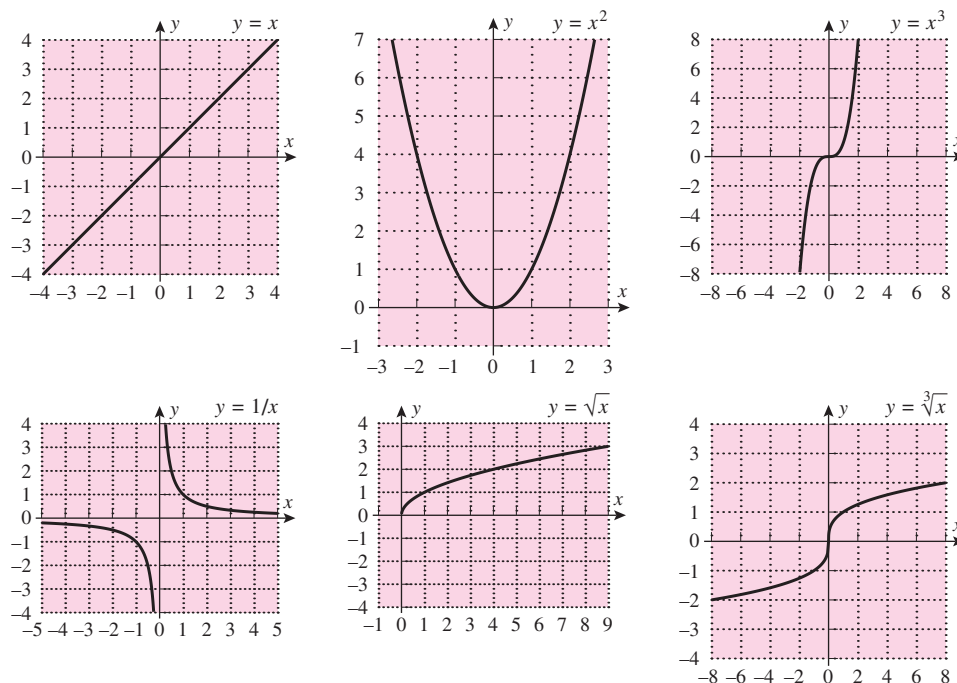


Figura 0.1.4

Os gráficos podem fornecer informação visual importante sobre uma função. Por exemplo, como o gráfico de uma função f no plano xy é o gráfico da equação $y = f(x)$, os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$; ou seja, a coordenada y de um ponto do gráfico de f é o valor de f na coordenada x correspondente (Figura 0.1.5). Os valores de x nos quais $f(x) = 0$ são as coordenadas x dos pontos nos quais o gráfico de f intersecta o eixo x (Figura 0.1.6). Esses valores são denominados **zeros** de f , **raízes** de $f(x) = 0$ ou **pontos de corte** de $y = f(x)$ com o eixo x .

■ O TESTE DA RETA VERTICAL

Nem toda curva no plano xy é o gráfico de uma função. Por exemplo, considere a curva na Figura 0.1.7, que é cortada em dois pontos distintos (a, b) e (a, c) por uma reta vertical. Essa curva não pode ser o gráfico de $y = f(x)$, qualquer que seja a função f ; senão teríamos

$$f(a) = b \quad \text{e} \quad f(a) = c$$

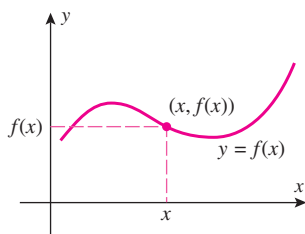


Figura 0.1.5 A coordenada y de um ponto no gráfico de $y = f(x)$ é o valor de f na coordenada x correspondente.

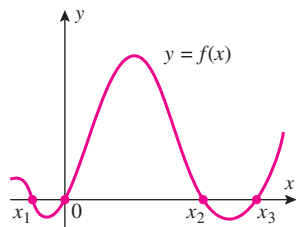


Figura 0.1.6 f tem zeros em x_1 , 0 , x_2 e x_3 .

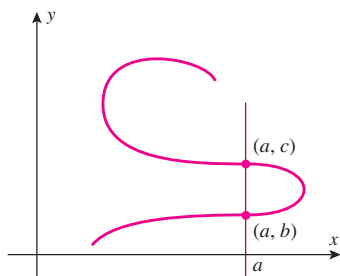


Figura 0.1.7 Esta curva não pode ser o gráfico de uma função.

Símbolos tais como $+x$ e $-x$ são enganosos, uma vez que é tentador concluir ser $+x$ positivo e $-x$ negativo. Porém, isso não precisa ser assim, pois x pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, se x for negativo, digamos $x = -3$, então $-x = 3$ é positivo e $+x = -3$ é negativo.

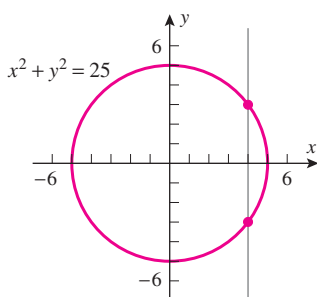


Figura 0.1.8

ADVERTÊNCIA

Para denotar a raiz quadrada negativa, precisamos escrever $-\sqrt{x}$. Por exemplo, a raiz quadrada positiva de 9 é $\sqrt{9} = 3$, enquanto a raiz quadrada negativa é $-\sqrt{9} = -3$. (Não cometa o erro de escrever $\sqrt{9} = \pm 3$.)

o que é impossível, uma vez que f não pode atribuir dois valores diferentes para a . Assim, não existe uma função f cujo gráfico seja a curva dada. Isso ilustra o seguinte resultado geral, denominado **teste da reta vertical**.

0.1.3 TESTE DA RETA VERTICAL Uma curva no plano xy é o gráfico de alguma função f se, e somente se, nenhuma reta vertical intersecta a curva mais de uma vez.

► **Exemplo 3** O gráfico da equação

$$x^2 + y^2 = 25$$

é um círculo de raio 5, centrado na origem; assim existem retas verticais que cortam o gráfico mais de uma vez (Figura 0.1.8) e essa equação não define y como uma função de x . ◀

■ A FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO

Lembre-se de que o **valor absoluto** ou a **grandeza** de um número real x é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

O efeito de considerar o valor absoluto de um número é tirar o sinal menos, se o número for negativo, ou deixá-lo como está, se for não negativo. Assim,

$$|5| = 5, \quad \left| -\frac{4}{7} \right| = \frac{4}{7}, \quad |0| = 0$$

A seguir, um resumo de suas propriedades algébricas.

0.1.4 PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO Se a e b são números reais, então

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $ -a = a $ | Um número e seu negativo têm o mesmo valor absoluto. |
| (b) $ ab = a b $ | O valor absoluto de um produto é igual ao produto dos valores absolutos. |
| (c) $ a/b = a / b , b \neq 0$ | O valor absoluto de uma razão é a razão dos valores absolutos. |
| (d) $ a + b \leq a + b $ | A desigualdade triangular. |

O gráfico da função $f(x) = |x|$ pode ser obtido representando separadamente as duas partes da equação

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Combinando as duas partes, obtemos o gráfico em forma de V da Figura 0.1.9.

Valores absolutos guardam relações importantes com raízes quadradas. Para ver isso, lembre-se de que, pela Álgebra, todo número real positivo x tem duas raízes quadradas, uma positiva e a outra negativa. Por definição, o símbolo $\sqrt{x}$ denota a raiz quadrada **positiva** de x .

Ao simplificar as expressões da forma $\sqrt{x^2}$, é necessário cuidado, pois nem sempre é verdade que $\sqrt{x^2} = x$. Essa equação é correta se x for não negativo, porém é falsa se x for negativo. Por exemplo, se $x = -4$, então

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq x$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Verifique (1) usando uma calculadora gráfica para mostrar que as equações $y = \sqrt{x^2}$ e $y = |x|$ têm o mesmo gráfico.

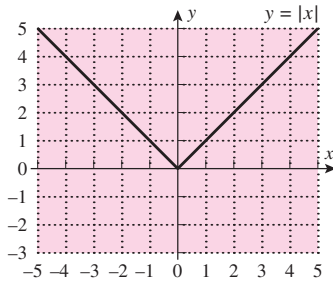


Figura 0.1.9

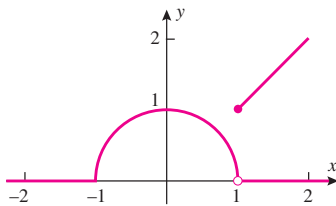


Figura 0.1.10

OBSERVAÇÃO

Uma afirmação que é correta com todos os valores reais de x é

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (1)$$

FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é um exemplo de uma função definida *por partes*, no sentido de que a fórmula para f muda dependendo do valor de x .

► **Exemplo 4** Esboce o gráfico da função definida por partes pela fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

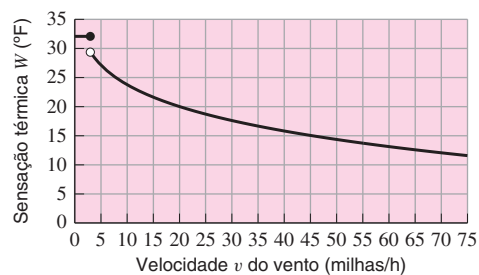
Solução A fórmula para f muda nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ (denominados *pontos de mudança* para a fórmula). Um bom procedimento para elaborar os gráficos de funções definidas por partes é fazê-lo separadamente sobre os intervalos determinados pelos pontos de mudança e depois nos próprios pontos. Para a função f deste exemplo, o gráfico é o segmento da reta horizontal $y = 0$ sobre o intervalo $(-\infty, -1]$, o semicírculo $y = \sqrt{1-x^2}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$ e o segmento da reta $y = x$ sobre o intervalo $[1, +\infty)$. A fórmula para f especifica que a equação $y = 0$ se aplica ao ponto de mudança -1 [assim, $y = f(-1) = 0$] e que a equação $y = x$ se aplica ao ponto de mudança 1 [assim, $y = f(1) = 1$]. O gráfico de f aparece na Figura 0.1.10. ◀

Na Figura 0.1.10, no ponto de mudança $x = 1$, a bola sólida está na reta, enquanto a bola vazia está no semicírculo, enfatizando que o ponto está na reta e não no semicírculo. Não há ambiguidade no ponto $x = -1$, pois as duas partes do gráfico juntam-se continuamente aí.

► **Exemplo 5** Aumentando a velocidade na qual o ar passa sobre a pele de uma pessoa, aumenta também a taxa de evaporação da umidade da pele, produzindo uma sensação de resfriamento. (Por isso utilizamos ventiladores no verão.) O *índice de sensação térmica* em um dado instante (definido pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA) é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 4 milhas por hora que produziria a mesma sensação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura do ar e velocidade do vento no dado instante. Uma fórmula empírica, isto é, baseada em dados experimentais, para o índice de sensação térmica W a 32°F com uma velocidade do vento de v milhas por hora é

$$W = \begin{cases} 32, & 0 \leq v \leq 3 \\ 55,628 - 22,07v^{0,16}, & 3 < v \end{cases}$$

Um gráfico de $W(v)$ gerado por computador é dado na Figura 0.1.11. ◀

Figura 0.1.11 Sensação térmica versus velocidade do vento a 32°F .

© Brian Horisk/Alamy

O índice de sensação térmica mede a sensação de resfriamento que sentimos com o efeito combinado de temperatura e velocidade do vento.

DOMÍNIO E IMAGEM

Se x e y estão relacionados pela equação $y = f(x)$, então o conjunto de todas as entradas permitidas (os valores de x) é denominado **domínio** de f , e o conjunto de todas as saídas (os valores de y) que resultam quando x varia sobre o domínio é denominado **imagem** de f . Por exemplo, se f é a função definida pela tabela no Exemplo 1, então o domínio é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ e a imagem é o conjunto $\{-1, 3, 4, 6\}$.

Às vezes, considerações físicas ou geométricas impõem restrições sobre as entradas permissíveis de uma função. Por exemplo, se y denota a área de um quadrado de lado x , então essas variáveis estão relacionadas pela equação $y = x^2$. Embora essa equação produza um único valor de y para cada número real x , o fato de que os comprimentos devem ser números não negativos impõe a exigência que $x \geq 0$.

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre as entradas permissíveis. Por exemplo, se $y = 1/x$, então $x = 0$ não é uma entrada válida, pois divisão por zero não está definida, e se $y = \sqrt{x}$, então valores negativos de x não são entradas válidas, pois produzem valores imaginários de y , e havíamos concordado em considerar somente funções reais de variável real. Em geral, temos a seguinte definição.

0.1.5 DEFINIÇÃO Se uma função de variável real a valores reais for definida por uma fórmula, e se não houver um domínio explicitado, então deve ser entendido que o domínio consiste em todos os números reais com os quais a fórmula fornece um valor real. Isso é denominado o **domínio natural** da função.

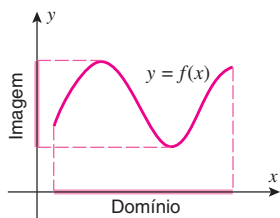


Figura 0.1.12 A projeção de $y = f(x)$ sobre o eixo x é o conjunto de valores x permissíveis para f , e a projeção sobre o eixo y é o conjunto de valores y correspondentes.

Veja no Apêndice B uma revisão de trigonometria.

O domínio e a imagem de uma função f podem ser identificados projetando o gráfico de $y = f(x)$ sobre os eixos coordenados, como mostra a Figura 0.1.12.

► **Exemplo 6** Encontre o domínio natural de

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = 1/[(x-1)(x-3)]$

(c) $f(x) = \tan x$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Solução (a) A função f tem valores reais com qualquer x real, assim seu domínio natural é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (b) A função f tem valores reais com qualquer x real, exceto $x = 1$ e $x = 3$, onde ocorrem divisões por zero. Dessa forma, o domínio natural é

$$\{x : x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solução (c) Uma vez que $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$, a função f tem valores reais exceto onde $\cos x = 0$, e isso ocorre quando x for um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais, exceto

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Solução (d) A função f tem valores reais, exceto quando a expressão dentro do radical for negativa. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais x tais que

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \geq 0$$

Essa desigualdade é satisfeita se $x \leq 2$ ou $x \geq 3$ (verifique), de modo que o domínio natural de f é

$$(-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \blacktriangleleft$$

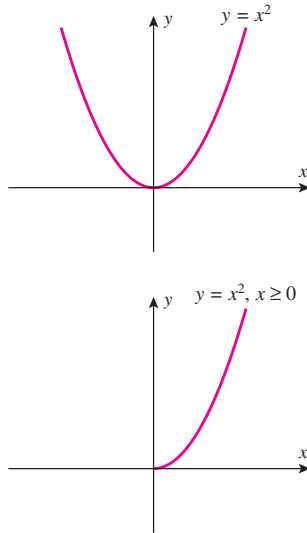
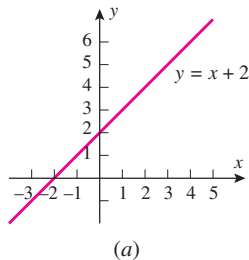
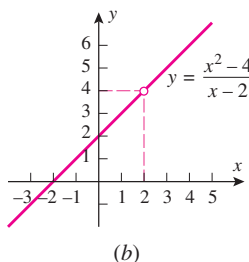


Figura 0.1.13



(a)



(b)

Figura 0.1.14

Em alguns casos, explicitamos o domínio ao definir uma função. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ é a área de um quadrado de lado x , então podemos escrever

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

para indicar que tomamos o domínio de f como sendo o conjunto dos números reais não negativos (Figura 0.1.13).

■ O EFEITO DE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS SOBRE O DOMÍNIO

As expressões algébricas são, frequentemente, simplificadas cancelando fatores comuns no numerador e no denominador. Entretanto, deve-se tomar cuidado com tais simplificações, pois elas podem alterar o domínio.

► Exemplo 7 O domínio natural da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (2)$$

consiste em todos os números reais x , exceto $x = 2$. Contudo, fatorando o numerador e cancelando o fator comum ao numerador e ao denominador, obtemos

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad (3)$$

Como o lado direito de (3) tem um valor de $f(2) = 4$, mas $f(2)$ não está definido em (2), vemos que a simplificação algébrica alterou a função. Geometricamente, o gráfico de (3) é a reta da Figura 0.1.14a, enquanto o gráfico de (2) é a mesma reta, mas com um buraco em $x = 2$, já que a função não está definida nesse ponto (Figura 0.1.14b). Resumindo, o efeito geométrico do cancelamento algébrico foi eliminar um buraco do gráfico original. ◀

As alterações no domínio de uma função que resultam de simplificações algébricas são, às vezes, irrelevantes para o problema que estamos tratando, podendo ser ignoradas. Contudo, se o domínio deve ser preservado, devemos impor explicitamente as restrições sobre a função simplificada. Por exemplo, se quisermos preservar o domínio da função no Exemplo 7, devemos expressar a forma simplificada da função como

$$f(x) = x + 2, \quad x \neq 2$$

► Exemplo 8 Encontre o domínio e a imagem de

$$(a) f(x) = 2 + \sqrt{x - 1} \quad (b) f(x) = (x + 1)/(x - 1)$$

Solução (a) Como nenhum domínio foi explicitado, o domínio de f é o domínio natural $[1, +\infty)$. À medida que x varia sobre o intervalo $[1, +\infty)$, o valor de $\sqrt{x - 1}$ varia sobre o intervalo $[0, +\infty)$; assim, o valor de $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$ varia sobre o intervalo $[2, +\infty)$, que é a imagem de f . O domínio e a imagem estão destacados nos eixos x e y da Figura 0.1.15.

Solução (b) A função f dada está definida em todos os x reais, exceto $x = 1$; assim, o domínio natural de f é

$$\{x : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

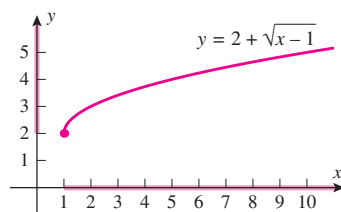


Figura 0.1.15

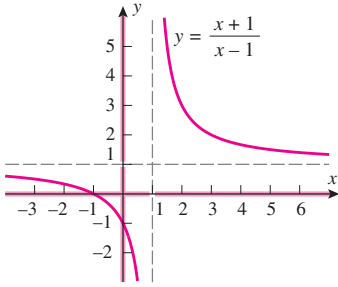


Figura 0.1.16

Para determinar a imagem, é conveniente introduzir uma variável dependente

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (4)$$

Embora o conjunto de valores possíveis de y não seja imediatamente evidente a partir dessa equação, o gráfico de (4), que aparece na Figura 0.1.16, sugere que a imagem de f consiste em todos os y , exceto $y = 1$. Para ver isso, vamos resolver (4) para x em termos de y :

$$\begin{aligned} (x-1)y &= x+1 \\ xy - y &= x+1 \\ xy - x &= y+1 \\ x(y-1) &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Agora fica evidente pelo segundo membro da equação que $y = 1$ não está na imagem; caso contrário, teríamos uma divisão por zero. Nenhum outro valor de y é excluído por essa equação; dessa forma, a imagem da função f é $\{y : y \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, que está de acordo com o resultado obtido graficamente. ◀

O DOMÍNIO E A IMAGEM EM PROBLEMAS APLICADOS

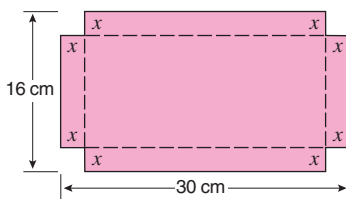
Em aplicações, considerações físicas frequentemente impõem restrições sobre o domínio e a imagem de uma função.

► **Exemplo 9** Uma caixinha aberta é feita de pedaços de papelão com 16 por 30 cm, cortando fora quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando para cima os lados (Figura 1.1.17a).

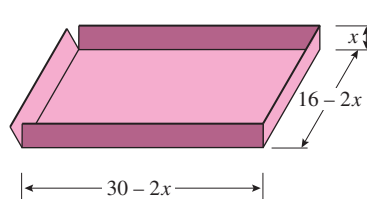
- Seja V o volume da caixa que resulta quando os quadrados tiverem lados de comprimento x . Determine uma fórmula para V como uma função de x .
- Encontre o domínio de V .
- Use o gráfico de V dado na Figura 0.1.17c para estimar a imagem de V .
- Descreva em palavras o que o gráfico diz sobre o volume.

Solução (a) Conforme mostra a Figura 0.1.17b, a caixa resultante tem dimensões $16 - 2x$ por $30 - 2x$ por x , logo o volume $V(x)$ é dado por

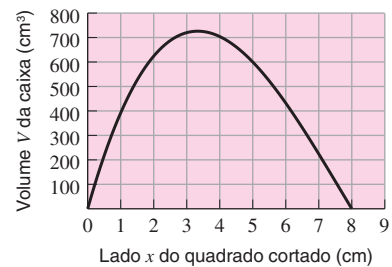
$$V(x) = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$$



(a)



(b)



(c)

Figura 0.1.17

Solução (b) O domínio é o conjunto dos valores de x , enquanto a imagem é o conjunto dos valores de V . Uma vez que x é uma medida de comprimento, deve ser não negativa, e uma vez que não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm (por quê?), os valores de x no domínio devem satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

Solução (c) A partir do gráfico de V versus x na Figura 0.1.17c, estimamos que os valores de V na imagem satisfazem

$$0 \leq V \leq 725$$

Note que se trata de uma aproximação. Mais adiante, mostraremos como determinar exatamente a imagem.

Solução (d) O gráfico nos mostra que a caixa com volume máximo ocorre para um valor de x entre 3 e 4 cm e que o volume máximo é de aproximadamente 725 cm^3 . Além disso, o volume decresce a zero quando x se aproxima de 0 ou 8, o que deveria fazer sentido intuitivamente. ◀

Nas aplicações que envolvem tempo, as fórmulas para as funções são, frequentemente, expressas em termos de uma variável t , cujo valor inicial é considerado como sendo $t = 0$.

► **Exemplo 10** Às 8h05min da manhã, um carro é detectado a uma velocidade de 30 m/s por um radar que está posicionado no acostamento de uma estrada reta. Supondo que o carro mantenha uma velocidade constante entre 8h05min e 8h06min da manhã, determine uma função $D(t)$ que expresse a distância percorrida pelo carro durante esse intervalo de tempo, como uma função do tempo t .

Solução Seria incômodo usar como variável t o tempo em horas; assim, vamos medir o tempo decorrido em segundos, começando com $t = 0$ às 8h05min e terminando com $t = 60$ às 8h06min. Em cada instante, a distância percorrida (em metros) é igual à velocidade do carro (em metros por segundo) multiplicada pelo tempo decorrido (em segundos). Então,

$$D(t) = 30t, \quad 0 \leq t \leq 60$$

O gráfico de D versus t está na Figura 0.1.18. ◀

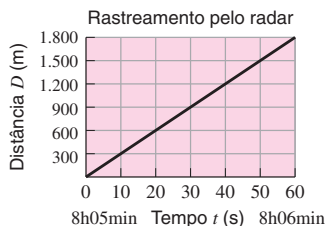


Figura 0.1.18

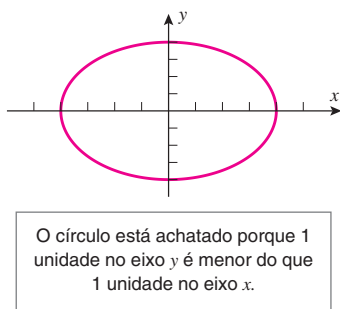


Figura 0.1.19

Nas aplicações em que as variáveis sobre os dois eixos têm unidades não relacionadas (p. ex., centímetros sobre o eixo y e segundos sobre o eixo x), então nada se obtém requerendo que as unidades tenham igual comprimento; escolha os comprimentos que tornem o gráfico tão claro quanto possível.

■ QUESTÕES DE ESCALAS E DE UNIDADES

Em problemas geométricos nos quais desejamos preservar a “verdadeira” forma de um gráfico, é necessário usar unidades de igual comprimento em ambos os eixos. Por exemplo, fazendo o gráfico de um círculo em um sistema de coordenadas em que a unidade no eixo dos y é menor do que a unidade no eixo dos x , o círculo será achatado verticalmente, resultando em uma elipse (Figura 0.1.19).

Porém, há situações nas quais é inconveniente ou impossível apresentar um gráfico usando unidades de igual comprimento. Por exemplo, consideremos a equação

$$y = x^2$$

Se quisermos mostrar a parte do gráfico no intervalo $-3 \leq x \leq 3$, não há problemas em usarmos unidades iguais, pois y varia somente entre 0 e 9 naquele intervalo. Entretanto, se quisermos mostrar a parte do gráfico sobre o intervalo $-10 \leq x \leq 10$, ocorre um problema em manter unidades de igual comprimento, uma vez que os valores de y variam entre 0 e 100. Nesse caso, a única maneira razoável de mostrar todo o gráfico sobre o intervalo $-10 \leq x \leq 10$ é comprimir a unidade de comprimento ao longo do eixo y , conforme ilustrado na Figura 0.1.20.

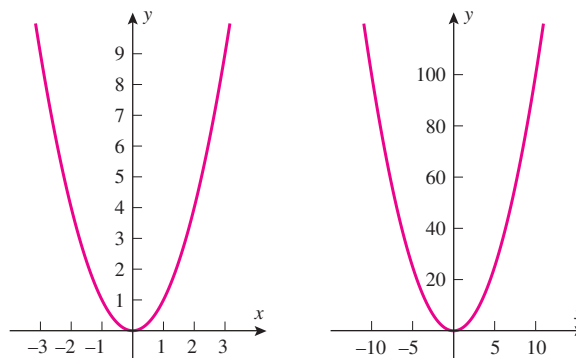


Figura 0.1.20

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.1 (Ver página 15 para respostas.)

- Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$.
 - O domínio natural de f é _____.
 - $f(3) =$ _____.
 - $f(t^2 - 1) =$ _____.
 - $f(x) = 7$ se $x =$ _____.
 - A imagem de f é _____.
- Os segmentos de retas no plano xy formam letras, conforme indicado.



- Se o eixo y for paralelo à letra I , quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f ?
 - Se o eixo y é perpendicular à letra I , quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f ?
- A figura dada mostra o gráfico completo de $y = f(x)$.
 - O domínio de f é _____.
 - A imagem de f é _____.
 - $f(-3) =$ _____.
 - $f(\frac{1}{2}) =$ _____.
 - As soluções de $f(x) = -\frac{3}{2}$ são $x =$ _____ e $x =$ _____.

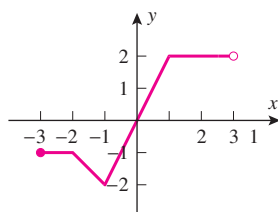


Figura Ex-3

- A tabela a seguir dá a previsão de cinco dias de temperaturas máximas e mínimas em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$).
 - Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas máxima e mínima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x ? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.
 - Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas mínima e máxima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x ? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.

	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
MÁXIMA	25	21	15	19	23
MÍNIMA	16	18	14	15	16

- Sejam c , l e A o comprimento, a largura e a área de um retângulo, respectivamente, e suponha que a largura do retângulo seja a metade do comprimento.
 - Se c for expresso como uma função de l , então $c =$ _____.
 - Se A for expressa como uma função de c , então $A =$ _____.
 - Se l for expressa como uma função de A , então $l =$ _____.

EXERCÍCIOS 0.1 Recurso Gráfico

- Use o gráfico abaixo para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
 - Com quais valores de x vale $y = 1$?
 - Com quais valores de x vale $y = 3$?
 - Com quais valores de y vale $x = 3$?
 - Com quais valores de x vale $y \leq 0$?
 - Quais são os valores máximo e mínimo de y e em quais valores de x eles ocorrem?

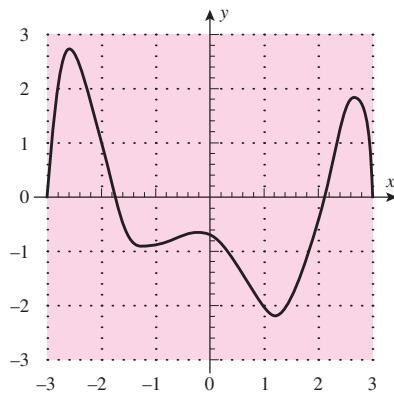


Figura Ex-1

- Use a tabela abaixo para responder às questões propostas no Exercício 1.

Tabela Ex-2

x	-2	-1	0	2	3	4	5	6
y	5	1	-2	7	-1	1	0	9

- Em cada parte da figura abaixo, determine se o gráfico define y como uma função de x .

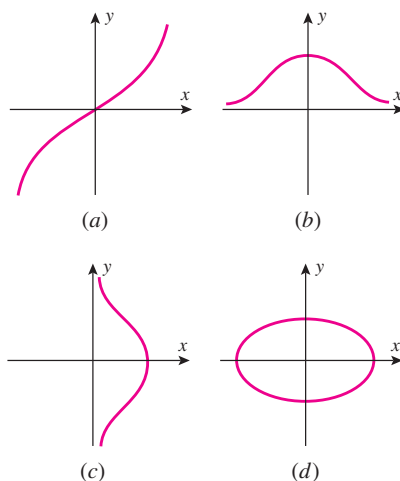


Figura Ex-3

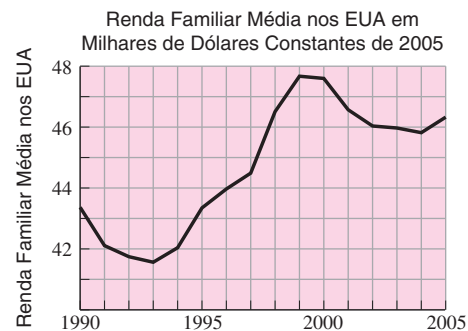
- Em cada parte, compare os domínios naturais de f e de g .

(a) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$; $g(x) = x$

(b) $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

- O gráfico a seguir mostra a renda familiar média nos EUA (ajustada pela inflação) entre 1990 e 2005. Use-o para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
 - Quando a renda média atingiu seu valor máximo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?
 - Quando a renda média atingiu seu valor mínimo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?
 - A renda média estava diminuindo durante os anos de 2000 e 2002. Ela estava diminuindo mais rapidamente durante o primeiro ou o segundo ano daquele período? Explique seu raciocínio.



Fonte: U.S. Census Bureau, August 2006.

Figura Ex-5

- Use o gráfico da renda média do Exercício 5 para responder às seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis quando for necessário.
 - Qual foi o crescimento anual médio da renda média entre 1993 e 1999?
 - A renda média cresceu durante o período de seis anos entre 1993 e 1999. A renda média cresceu mais rapidamente durante os três primeiros anos ou durante os últimos três anos desse período? Explique seu raciocínio.
 - Considere a afirmação: “Depois de anos de declínio, a renda média deste ano foi finalmente maior do que a do ano passado”. Em quais anos essa afirmação estaria correta?

7. Encontre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$ e $f(3t)$.

$$(a) f(x) = 3x^2 - 2 \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 3 \\ 2x, & x \leq 3 \end{cases}$$

8. Encontre $g(3)$, $g(-1)$, $g(\pi)$, $g(-1, 1)$ e $g(t^2 - 1)$.

$$(a) g(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (b) g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 1 \\ 3, & x < 1 \end{cases}$$

 **9-10** Determine o domínio natural e a imagem da função algebricamente e confirme seu resultado com o gráfico produzido por seu recurso gráfico. [Nota: Ajuste seu recurso gráfico para radianos quando se tratar de funções trigonométricas.] ■

$$\begin{array}{ll} 9. (a) f(x) = \frac{1}{x-3} & (b) F(x) = \frac{x}{|x|} \\ (c) g(x) = \sqrt{x^2 - 3} & (d) G(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} \\ (e) h(x) = \frac{1}{1 - \sin x} & (f) H(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}} \\ 10. (a) f(x) = \sqrt{3 - x} & (b) F(x) = \sqrt{4 - x^2} \\ (c) g(x) = 3 + \sqrt{x} & (d) G(x) = x^3 + 2 \\ (e) h(x) = 3 \sin x & (f) H(x) = (\sin \sqrt{x})^{-2} \end{array}$$

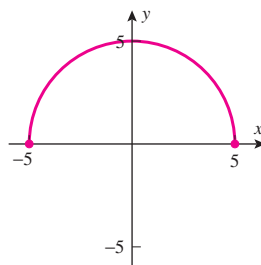
ENFOCANDO CONCEITOS

11. (a) Se você tivesse uma máquina que pudesse registrar a população mundial continuamente, você esperaria obter um gráfico da população *versus* o tempo que fosse uma curva contínua (não interrompida)? Explique o que poderia causar interrupções na curva.
(b) Suponha que um paciente de um hospital receba uma injeção de um antibiótico a cada oito horas e que, entre as injeções, a concentração C de antibiótico na corrente sanguínea decresce à medida que ele é absorvido pelos tecidos. Como poderia ser o gráfico de C *versus* o tempo t decorrido?
12. (a) Caso você tivesse uma máquina que pudesse medir a temperatura de um quarto continuamente por um período de 24 horas, você esperaria obter um gráfico contínuo (não quebrado) da temperatura *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.
(b) Se você tivesse um computador que pudesse acompanhar continuamente o número de caixas de cereal nas prateleiras de um supermercado durante uma semana, você esperaria obter um gráfico de curva contínua (sem interrupções) do número de caixas *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.
13. Um bote balança para cima e para baixo sob a ação de ondas fracas. De repente, é atingido por uma onda grande e afunda. Esboce um gráfico aproximado da altura do bote acima do fundo do mar como uma função do tempo.

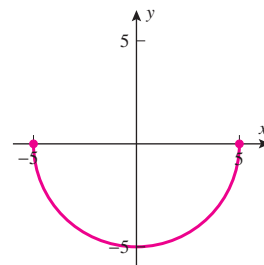
14. Uma xícara com café quente está sobre a mesa. Você despeja leite frio nela e espera por uma hora. Esboce um gráfico aproximado da temperatura do café como uma função do tempo.

15-18 Conforme vimos no Exemplo 3, a equação $x^2 + y^2 = 25$ não define y como uma função de x . Cada gráfico nestes exercícios é uma porção do círculo $x^2 + y^2 = 25$. Em cada caso, determine se o gráfico define y como uma função de x e, se isso ocorrer, dê uma fórmula para y em termos de x . ■

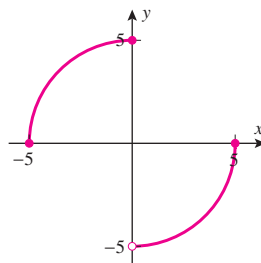
15.



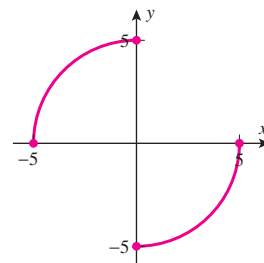
16.



17.



18.



19-22 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. Uma curva que cruza o eixo x em dois pontos distintos não pode ser o gráfico de uma função.
20. O domínio natural de uma função real definida por uma fórmula consiste em todos os números reais com os quais a fórmula fornece um valor real.
21. A imagem da função valor absoluto é o conjunto de todos os números reais positivos.
22. Se $g(x) = 1/\sqrt{f(x)}$, então o domínio de g consiste em todos os números reais x com os quais $f(x) \neq 0$.
23. Use a equação $y = x^2 - 6x + 8$ para responder às questões.
(a) Com quais valores de x vale $y = 0$?
(b) Com quais valores de x vale $y = -10$?
(c) Com quais valores de x vale $y \geq 0$?
(d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo? Se assim for, determine-os.
24. Use a equação $y = 1 + \sqrt{x}$ para responder às seguintes questões.
(a) Com quais valores de x vale $y = 4$?
(b) Com quais valores de x vale $y = 0$?
(c) Com quais valores de x vale $y \geq 6$?

(d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo? Se assim for, determine-os.

25. Conforme mostra a figura abaixo, um pêndulo de comprimento constante L faz um ângulo θ com sua posição vertical. Expresse a altura h como uma função do ângulo θ .

26. Expresse o comprimento L da corda de um círculo com raio de 10 cm como função do ângulo central θ (veja a figura abaixo).

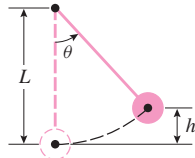


Figura Ex-25

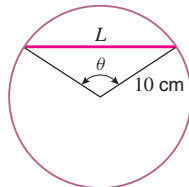


Figura Ex-26

27-28 Expresse a função na forma por partes, sem usar valores absolutos. [Sugestão: Pode ser útil gerar o gráfico da função.] ■

27. (a) $f(x) = |x| + 3x + 1$ (b) $g(x) = |x| + |x - 1|$

28. (a) $f(x) = 3 + |2x - 5|$ (b) $g(x) = 3|x - 2| - |x + 1|$

29. Conforme mostra a figura abaixo, uma caixa aberta deve ser construída de uma folha retangular de metal com 8 por 15 cm, cortando fora quadrados com lados de comprimento x de cada canto e dobrando os lados.

- Expresse o volume V como uma função de x .
- Encontre o domínio de V .
- Esboce o gráfico da função V obtida em (a) e estime a imagem dessa função.
- Com palavras, descreva como o volume V da caixa varia com x e discuta como poderiam ser construídas caixas com volume máximo.

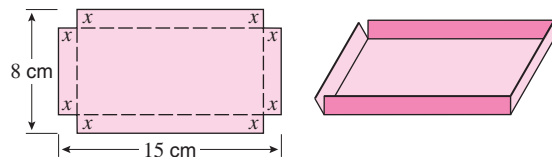


Figura Ex-29

30. Repita o Exercício 29 supondo que a caixa seja construída da mesma maneira a partir de uma folha quadrada de metal com 6 cm de lado.

31. Uma empresa de construções acrescentou uma área retangular de mil metros quadrados à sua sede. Três lados da área estão cercados. O lado da sede que é adjacente à área mede 100 metros, e uma parte desse lado é utilizada como o quarto lado da área acrescentada. Sejam x e y as dimensões da área retangular, onde x é medido paralelamente à sede, e L o comprimento da cerca necessária para essas dimensões.

- Encontre uma fórmula para L em termos de x e y .
- Encontre uma fórmula que expresse L somente em termos de x .

(c) Qual é o domínio da função em (b)?

(d) Esboce o gráfico da função em (b) e estime as dimensões da área retangular que minimizem a quantidade de cerca necessária.

32. Conforme mostra a figura abaixo, uma câmara é montada em um ponto a 900 m da base de lançamento de um foguete. Quando lançado, o foguete sobe verticalmente, e o ângulo de elevação da câmara é constantemente ajustado para seguir a base do foguete.

- Expresse a altura x como uma função do ângulo θ de elevação.
- Determine o domínio da função em (a).
- Gere o gráfico da função em (a) e use-o para estimar a altura do foguete, quando seu ângulo de elevação for $\pi/4 \approx 0,7854$ radianos. Compare essa estimativa com a altura exata.

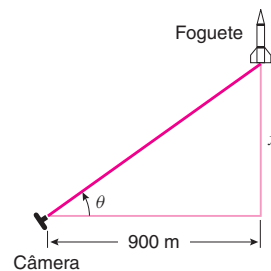


Figura Ex-32

33. Uma companhia de sopa deseja fabricar uma lata na forma de um cilindro circular reto que tenha capacidade para 500 cm³ de líquido. O material para a tampa e a base custa 0,02 centavos/cm², enquanto o material para a lateral custa 0,01 centavo/cm².

- Estime o raio r e a altura h da lata que custa menos para ser fabricada. [Sugestão: Expresse o custo C em termos de r .]
- Suponha que a tampa e a base de raio r sejam tiradas de folhas quadradas, cujos lados têm comprimento $2r$, e os retalhos são descartados. Levando em conta o custo das folhas quadradas, você esperaria que o custo da lata mais barata seja maior ou menor do que em (a)? Explique.
- Estime o raio, a altura e o custo da lata em (b) e determine se sua conjectura estava certa.

34. Um construtor de dependências esportivas quer colocar uma pista de corrida de um quarto de milha – 396 metros – em torno de um campo de futebol americano, conforme a figura a seguir. O campo de futebol tem 108 metros de comprimento (incluindo as zonas finais) por 48 metros de largura. A pista consiste em duas retas e dois semicírculos, sendo que as redes se estendem pelo menos ao longo do campo de futebol.

- Mostre que é possível construir a pista de um quarto de milha em torno do campo de futebol. [Sugestão: Encontre a menor pista que pode ser construída em torno do campo.]
- Seja L o comprimento de uma das partes retas (em metros) e x uma distância (em metros) entre a lateral do campo e a parte reta da pista. Faça um gráfico de L versus x .

- (c) Use o gráfico para estimar o valor de x que produz a parte reta mais curta e então encontre exatamente esse valor.
 (d) Use o gráfico para estimar o comprimento da maior parte reta possível e encontre exatamente esse comprimento.

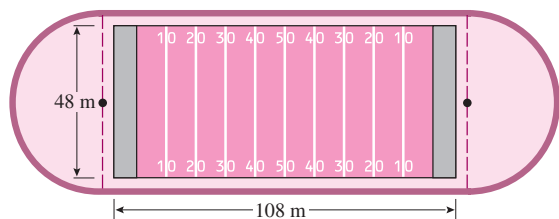


Figura Ex-34

35-36 (i) Explique por que a função f tem um ou mais buracos em seu gráfico e estabeleça os valores de x nos quais esses buracos ocorrem. (ii) Determine uma função g cujo gráfico seja idêntico ao de f , mas sem os buracos. ■

35. $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x-1)}$ 36. $f(x) = \frac{x^2+|x|}{|x|}$

37. Em 2001, o Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA introduziu um novo índice de sensação térmica (WCT). Para uma dada temperatura externa T em graus Fahrenheit e velocidade do vento igual a v milhas por hora, o índice de sensação térmica WCT é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 3 milhas por hora que produziria a mesma sen-

sação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura externa T e velocidade do vento v . Utilizando um modelo mais preciso de resfriamento devido ao vento, a nova fórmula é dada por

$$WCT = \begin{cases} T, & 0 \leq v \leq 3 \\ 35,74 + 0,6215T - 35,75v^{0,16} + 0,4275Tv^{0,16}, & 3 < v \end{cases}$$

onde T é a temperatura em °F, v é a velocidade do vento em milhas por hora e WCT é a temperatura equivalente em °F. Encontre o índice de sensação térmica até o grau mais próximo se $T = 25^\circ\text{F}$ e

- (a) $v = 3$ milhas/hora (b) $v = 15$ milhas/hora
 (c) $v = 46$ milhas/hora

Fonte: Adaptado de UMAP Module 658, *Windchill*, de W. Bosch e L. Coob, COMAP, Arlington, MA.

38-40 Use a fórmula para o índice de sensação térmica descrita no Exercício 37. ■

38. Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de -60°F e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.
 39. Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de -10°F e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.
 40. Encontre a velocidade do vento até a milha por hora mais próxima se o WCT for de 5°F com uma temperatura do ar de 20°F .

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.1

1. (a) $[-1, +\infty)$ (b) 6 (c) $|t| + 4$ (d) 8 (e) $[4, +\infty)$ 2. (a) M (b) I 3. (a) $[-3, 3)$ (b) $[-2, 2]$ (c) -1 (d) 1 (e) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{2}$
 4. (a) sim; domínio: $\{15, 19, 21, 23, 25\}$; imagem: $\{14, 15, 16, 18\}$ (b) não 5. (a) $c = 2l$ (b) $A = c^2/2$ (c) $l = \sqrt{A/2}$

0.2 FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

Da mesma forma que números podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos, produzindo outros números, também funções podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas, produzindo outras funções. Nesta seção, vamos discutir essas operações e algumas outras sem análogos em aritmética ordinária.

■ OPERAÇÕES ARITMÉTICAS SOBRE FUNÇÕES

Duas funções, f e g , podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas de forma natural para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g . Por exemplo, $f + g$ é definida pela fórmula

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (1)$$

que indica que, para cada entrada, o valor de $f + g$ é obtido adicionando-se os valores de f e g . A equação (1) dá uma fórmula para $f + g$, porém não diz nada sobre o domínio de $f + g$. Entretanto, para que o lado direito da equação esteja definido, x precisa estar no domínio de f e no domínio de g . Assim, definimos o domínio de $f + g$ como sendo a intersecção desses dois domínios. Contudo, geralmente, temos a seguinte definição.

Se f for uma função constante, digamos $f(x) = c$, então o produto de f e g será cg . Dessa forma, multiplicar uma função por uma constante é um caso particular da multiplicação de duas funções.

0.2.1 DEFINIÇÃO Dadas as funções f e g , definimos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Para as funções $f + g$, $f - g$ e fg , definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g ; para a função f/g , definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g , excluídos os pontos onde $g(x) = 0$ (para evitar a divisão por zero).

► **Exemplo 1** Sejam

$$f(x) = 1 + \sqrt{x - 2} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Encontre o domínio e a fórmula das funções $f + g$, $f - g$, fg , f/g e $7f$.

Solução Primeiro, determinaremos as fórmulas para as funções e, depois, os domínios. As fórmulas são:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (1 + \sqrt{x - 2}) + (x - 3) = x - 2 + \sqrt{x - 2} \quad (2)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (1 + \sqrt{x - 2}) - (x - 3) = 4 - x + \sqrt{x - 2} \quad (3)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (1 + \sqrt{x - 2})(x - 3) \quad (4)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1 + \sqrt{x - 2}}{x - 3} \quad (5)$$

$$(7f)(x) = 7f(x) = 7 + 7\sqrt{x - 2} \quad (6)$$

Os domínios de f e g são $[2, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$, respectivamente (os domínios naturais). Assim, segue da Definição 0.2.1 que os domínios de $f + g$, $f - g$ e fg são a intersecção desses domínios, a saber,

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [2, +\infty) \quad (7)$$

Além disso, como $g(x) = 0$ se $x = 3$, o domínio de f/g é (7) com $x = 3$ removido, ou seja,

$$[2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Finalmente, o domínio de $7f$ é igual ao domínio de f . ◀

Nesse último exemplo, ocorreu que os domínios das funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g foram os domínios naturais resultantes das fórmulas obtidas para essas funções. Isso nem sempre ocorre, e aqui temos um exemplo.

► **Exemplo 2** Mostre que se $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x$, então o domínio de fg não é igual ao domínio natural de h .

Solução O domínio natural de $h(x) = x$ é $(-\infty, +\infty)$. Observe que

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x = h(x)$$

no domínio de fg . Os domínios de f e de g são ambos $[0, +\infty)$, de modo que o domínio de fg é

$$[0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

pela Definição 0.2.1. Como os domínios de fg e h são diferentes, não é correto escrever $(fg)(x) = x$ sem incluir a restrição de que essa fórmula só vale com $x \geq 0$. ◀

■ COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Vamos considerar agora uma operação sobre funções, denominada *composição*, que não tem análogo direto em aritmética usual. Informalmente, a operação de composição é executada substituindo-se em uma dada função a variável independente por alguma função. Por exemplo, suponha que

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

Se substituirmos x por $g(x)$ na fórmula de f , obtemos uma nova função

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

a qual denotamos por $f \circ g$. Assim,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

Em geral, temos a seguinte definição.

Embora à primeira vista o domínio de $f \circ g$ possa parecer complicado, intuitivamente faz sentido: para computar $f(g(x))$, necessita-se de x no domínio de g para computar $g(x)$ e, depois, $g(x)$ no domínio de f para computar $f(g(x))$.

0.2.2 DEFINIÇÃO Dadas as funções f e g , a *composição* de f e g , denotada por $f \circ g$, é a função definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Por definição, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x no domínio de g com o qual $g(x)$ está no domínio de f .

► **Exemplo 3** Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre

$$(a) (f \circ g)(x) \quad (b) (g \circ f)(x)$$

Solução (a) A fórmula para $f(g(x))$ é

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 + 3 = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$$

Como o domínio de g é $[0, +\infty)$ e o de f é $(-\infty, +\infty)$, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x em $[0, +\infty)$ com o qual $g(x) = \sqrt{x}$ está em $(-\infty, +\infty)$; assim, o domínio de $f \circ g$ é $[0, +\infty)$. Logo,

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \quad x \geq 0$$

Solução (b) A fórmula para $g(f(x))$ é

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Como o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o de g é $[0, +\infty)$, o domínio de $g \circ f$ consiste em todo x em $(-\infty, +\infty)$ com o qual $f(x) = x^2 + 3$ está em $[0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g \circ f$ é $(-\infty, +\infty)$. Logo,

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Não há necessidade de indicar que o domínio é $(-\infty, +\infty)$, pois esse é o domínio natural de $\sqrt{x^2 + 3}$. ◀

Note que as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ do Exemplo 3 não são iguais. Assim, a ordem em que efetuamos uma composição pode fazer (e geralmente faz) uma diferença no resultado final.

As composições também podem ser definidas para três ou mais funções; por exemplo, $(f \circ g \circ h)(x)$ é computada como

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Em outras palavras, primeiro encontramos $h(x)$, depois $g(h(x))$ e, finalmente, $f(g(h(x)))$.

► **Exemplo 4** Encontre $(f \circ g \circ h)(x)$ se

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1/x, \quad h(x) = x^3$$

Solução

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^3)) = f(1/x^3) = \sqrt{1/x^3} = 1/x^{3/2} \blacktriangleleft$$

■ EXPRESSANDO UMA FUNÇÃO COMO UMA COMPOSIÇÃO

Muitos problemas em Matemática são abordados pela “decomposição” de funções em uma composição de funções mais simples. Por exemplo, considere a função h dada por

$$h(x) = (x + 1)^2$$

Para calcular $h(x)$ em um dado valor de x , computaríamos primeiro $x + 1$ e, então, o quadrado do resultado. Essas duas operações são executadas pelas funções

$$g(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad f(x) = x^2$$

Podemos expressar h em termos de f e g escrevendo

$$h(x) = (x + 1)^2 = [g(x)]^2 = f(g(x))$$

e, assim, conseguimos expressar h como a composição $h = f \circ g$.

O processo de raciocínio neste exemplo sugere um procedimento geral de decomposição de uma função h em uma composição $h = f \circ g$:

- Pense sobre como poderíamos calcular $h(x)$ com um valor específico de x , tentando dividir os cálculos em dois passos executados sucessivamente.
- A primeira operação no cálculo determinará uma função g e a segunda, uma função f .
- A fórmula para h pode, então, ser escrita como $h(x) = f(g(x))$.

Para fins de descrição, iremos nos referir a g como a “função de dentro” e a f como a “função de fora” na expressão $f(g(x))$. A função de dentro executa a primeira operação e a de fora executa a segunda.

► **Exemplo 5** Expresse $\sin(x^3)$ como uma composição de duas funções.

Solução Para computar $\sin(x^3)$, calcularíamos primeiro x^3 e, então, o seno do resultado; assim, $g(x) = x^3$ é a função de dentro e $f(x) = \sin x$, a de fora. Logo,

$$\sin(x^3) = f(g(x)) \quad \boxed{g(x) = x^3 \text{ e } f(x) = \sin x} \blacktriangleleft$$

A Tabela 0.2.1 dá mais exemplos de decomposições de funções em composições.

Tabela 0.2.1
COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

FUNÇÃO	$g(x)$ DE DENTRO	$f(x)$ DE FORA	COMPOSIÇÃO
$(x^2 + 1)^{10}$	$x^2 + 1$	x^{10}	$(x^2 + 1)^{10} = f(g(x))$
$\text{sen}^3 x$	$\text{sen } x$	x^3	$\text{sen}^3 x = f(g(x))$
$\text{tg}(x^5)$	x^5	$\text{tg } x$	$\text{tg}(x^5) = f(g(x))$
$\sqrt{4 - 3x}$	$4 - 3x$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4 - 3x} = f(g(x))$
$8 + \sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$8 + x$	$8 + \sqrt{x} = f(g(x))$
$\frac{1}{x+1}$	$x+1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+1} = f(g(x))$

OBSERVAÇÃO

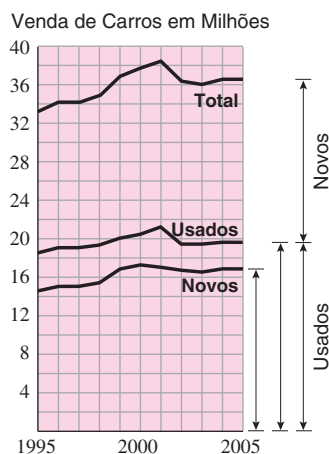
Sempre há mais de uma maneira de expressar uma função como uma composição. Por exemplo, aqui estão duas maneiras de expressar $(x^2 + 1)^{10}$ como composições diferentes daquela da Tabela 0.2.1:

$$(x^2 + 1)^{10} = [(x^2 + 1)^2]^5 = f(g(x))$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 \text{ e } f(x) = x^5$$

$$(x^2 + 1)^{10} = [(x^2 + 1)^3]^{10/3} = f(g(x))$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^3 \text{ e } f(x) = x^{10/3}$$



Fonte: NADA.

Figura 0.2.1

FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

O restante desta seção será dedicado a considerar o efeito geométrico de efetuar operações básicas com funções. Isso nos permitirá utilizar gráficos conhecidos de funções para visualizar ou esboçar gráficos de funções relacionadas. Por exemplo, a Figura 0.2.1 mostra os gráficos de vendas anuais de carros novos $N(t)$ e usados $U(t)$ ao longo de um certo período. Esses gráficos podem ser usados para construir o gráfico do total de vendas anuais de carros

$$T(t) = N(t) + U(t)$$

somando os valores de $N(t)$ e $U(t)$ para cada valor de t . Em geral, o gráfico de $y = f(x) + g(x)$ pode ser construído a partir dos gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ somando os valores de y correspondentes a cada x .

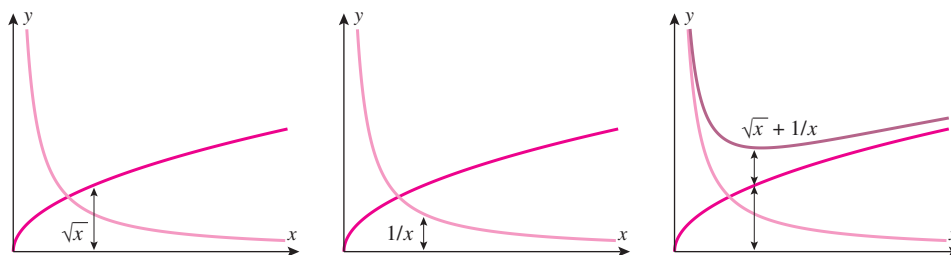
► **Exemplo 6** Na Figura 0.1.4, observe os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ e faça um esboço que mostre a forma geral do gráfico $y = \sqrt{x} + 1/x$ com $x > 0$.

Solução Para somar os valores de y correspondentes de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ graficamente, basta imaginar que eles estejam “empilhados” um em cima do outro. Isso dá lugar ao esboço da Figura 0.2.2. ◀

Use a técnica do Exemplo 6 para esboçar o gráfico da função

$$\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

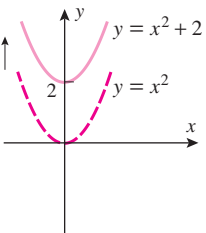
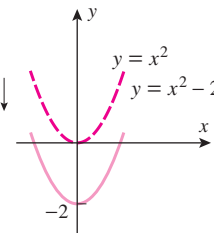
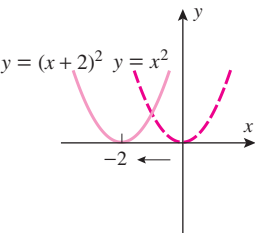
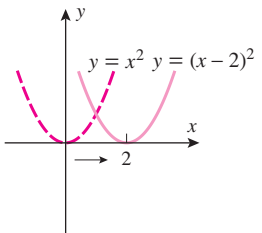
Figura 0.2.2 Somando as coordenadas y de $\sqrt{x}$ e de $1/x$, obtemos a coordenada y de $\sqrt{x} + 1/x$.



■ TRANSLAÇÕES

Na Tabela 0.2.2, ilustramos o efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ de somar a f ou à sua variável independente x uma constante *positiva* c , bem como o efeito de subtrair essa constante de f ou de x . Por exemplo, o primeiro resultado na tabela ilustra que somar uma constante positiva c à função f soma c a cada coordenada y de seu gráfico, transladando o gráfico c unidades para cima. Analogamente, subtrair c de f translada o gráfico c unidades para baixo. Por outro lado, se uma constante positiva c é somada a x , então o valor de $y = f(x + c)$ em $x - c$ é $f(x)$; e como o ponto $x - c$ está c unidades à esquerda de x no eixo x , o gráfico de $y = f(x + c)$ necessariamente é o de $y = f(x)$ transladado c unidades para a esquerda. Analogamente, subtrair c de x translada o gráfico c unidades para a direita.

Tabela 0.2.2
PRINCÍPIOS DE TRANSLAÇÃO

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Somar uma constante positiva c a $f(x)$	Subtrair uma constante positiva c de $f(x)$	Somar uma constante positiva c a x	Subtrair uma constante positiva c de x
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para cima	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para baixo	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a esquerda	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a direita
EXEMPLO				

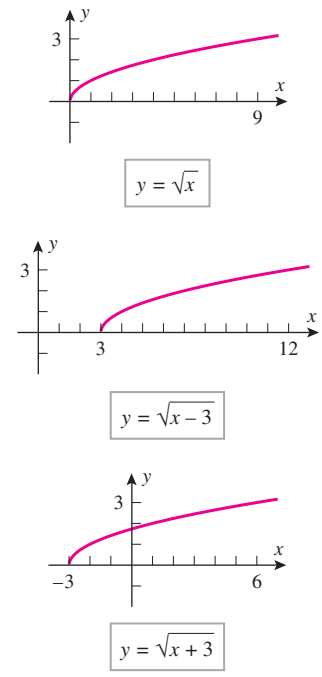


Figura 0.2.3

Antes de passar aos próximos exemplos, é conveniente rever os gráficos das Figuras 0.1.4 e 0.1.9.

► **Exemplo 7** Esboce o gráfico de

(a) $y = \sqrt{x - 3}$ (b) $y = \sqrt{x + 3}$

Solução Usando os princípios de translação da Tabela 0.2.2, o gráfico da equação $y = \sqrt{x - 3}$ pode ser obtido transladando 3 unidades para a direita o gráfico de $y = \sqrt{x}$. O gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ pode ser obtido transladando o de $y = \sqrt{x}$ 3 unidades para a esquerda (Figura 0.2.3). ◀

► **Exemplo 8** Esboce o gráfico de $y = x^2 - 4x + 5$.

Solução Completando o quadrado dos dois primeiros termos, obtemos

$$y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

Dessa forma, vemos que o gráfico pode ser obtido transladando 2 unidades para a direita o gráfico de $y = x^2$ devido ao $(x - 2)$ e 1 unidade para cima devido ao $+1$ (Figura 0.2.4). ◀

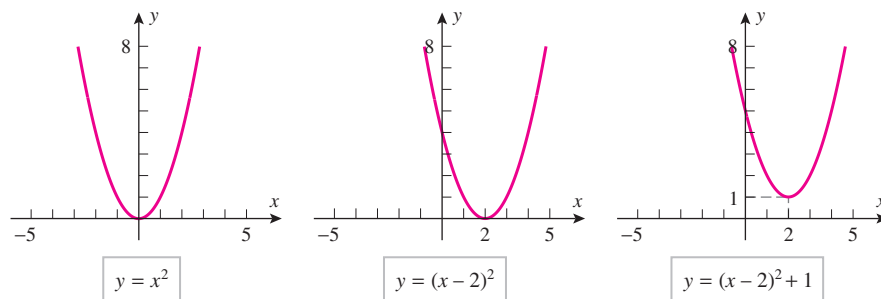


Figura 0.2.4

REFLEXÕES

O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(-x, y)$. Analogamente, o gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(x, -y)$ [a equação $y = -f(x)$ é equivalente a $-y = f(x)$]. Isso está resumido na Tabela 0.2.3.

Tabela 0.2.3
PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Substituir x por $-x$	Multiplicar $f(x)$ por -1
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(-x)$	$y = -f(x)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x
EXEMPLO		

► **Exemplo 9** Esboce o gráfico de $y = \sqrt[3]{2-x}$.

Solução Usando os princípios de translação e de reflexão mostrados nas Tabelas 0.2.2 e 0.2.3, o gráfico pode ser obtido por uma reflexão seguida por uma translação: primeiro refletimos o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ pelo eixo y para obter o gráfico de $y = \sqrt[3]{-x}$, então trasladamos 2 unidades para a direita para obter o gráfico da equação $y = \sqrt[3]{-(x-2)} = \sqrt[3]{2-x}$ (Figura 0.2.5). ◀

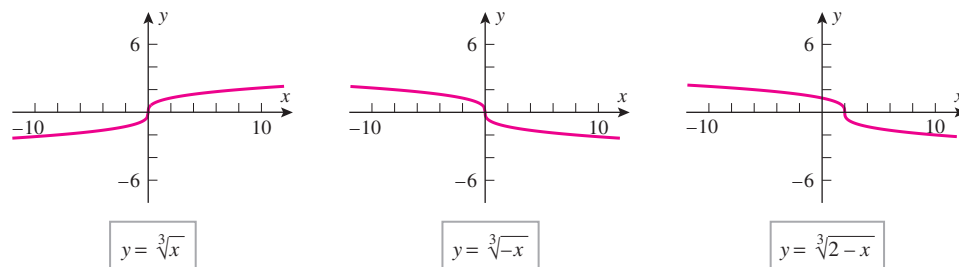


Figura 0.2.5

► **Exemplo 10** Esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$.

Solução O gráfico pode ser obtido por uma reflexão e por duas translações: primeiro, transladamos 2 unidades para a direita o gráfico de $y = |x|$ para obter o gráfico de $y = |x - 2|$; depois, refletimos pelo eixo x para obter o gráfico de $y = -|x - 2|$; então, transladamos 4 unidades para cima para obter o gráfico da equação $y = -|x - 2| + 4 = 4 - |x - 2|$ (Figura 0.2.6). ◀

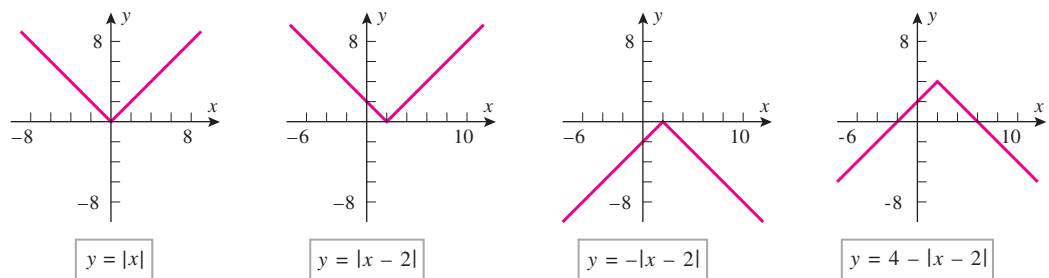


Figura 0.2.6

■ **ALONGAMENTOS E COMPRESSÕES**

Multiplicar $f(x)$ por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de alongar o gráfico de $y = f(x)$ na direção y por um fator de c se $c > 1$ e de comprimi-lo na direção y por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. Por exemplo, multiplicar $f(x)$ por 2 dobra cada coordenada y , portanto alonga o gráfico verticalmente por um fator de 2, enquanto multiplicar por $\frac{1}{2}$ corta cada coordenada y pela metade, portanto comprime o gráfico verticalmente por um fator de 2. Analogamente, multiplicar x por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de comprimir o gráfico de $y = f(x)$ na direção x por um fator de c se $c > 1$ e de alongá-lo na direção x por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. [Se isso parece um pouco ao contrário, pense assim: o valor de $2x$ varia duas vezes mais rápido do que x , de modo que um ponto que se move ao longo do eixo x a partir da origem só precisa viajar a metade da distância para que $y = f(2x)$ tenha o mesmo valor que $y = f(x)$, com isso criando uma compressão horizontal do gráfico.] Tudo isso está resumido na Tabela 0.2.4.

Descreva o efeito geométrico de multiplicar uma função f por uma constante *negativa* em termos de reflexões, alongamentos e compressões. Qual é o efeito geométrico de multiplicar a variável independente de uma função f por uma constante *negativa*?

Tabela 0.2.4

PRINCÍPIOS DE Aalongamento E COMPRESSÃO

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Multiplicar $f(x)$ por c ($c > 1$)	Multiplicar $f(x)$ por c ($0 < c < 1$)	Multiplicar x por c ($c > 1$)	Multiplicar x por c ($0 < c < 1$)
NOVA EQUAÇÃO	$y = cf(x)$	$y = cf(x)$	$y = f(cx)$	$y = f(cx)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de $1/c$	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de $1/c$
EXEMPLO				

SIMETRIA

A Figura 0.2.7 ilustra três tipos de simetrias: *simetria em relação ao eixo x* , *simetria em relação ao eixo y* e *simetria em relação à origem*. Como mostra a figura, a curva é simétrica em relação ao eixo x se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(x, -y)$ também está no gráfico; e é simétrica em relação ao eixo y se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, y)$ também está no gráfico. Uma curva é simétrica em relação à origem se, com cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, -y)$ também está no gráfico. (Equivalentemente, a curva é simétrica em relação à origem se permanecer inalterada por uma rotação de 180° em torno da origem.) Isso sugere os testes de simetria a seguir.

Explique por que o gráfico de uma função não nula não pode ser simétrico em relação ao eixo x .

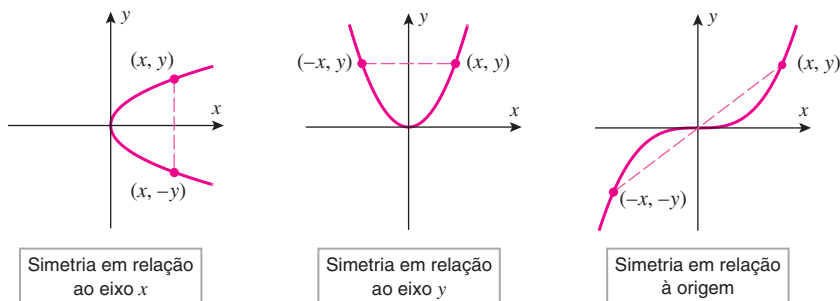


Figura 0.2.7

0.2.3 TEOREMA (Testes de simetria)

- (a) Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo y se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.
- (b) Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo x se, e somente se, substituindo-se y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.
- (c) Uma curva plana é simétrica em relação à origem se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ e y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.

► **Exemplo 11** Use o Teorema 0.2.3 para identificar simetrias no gráfico de $x = y^2$.

Solução Substituir y por $-y$ dá $x = (-y)^2$, que simplifica para a equação original $x = y^2$. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x . O gráfico não é simétrico em relação ao eixo y pois substituir x por $-x$ dá $-x = y^2$, que não é equivalente à equação original $x = y^2$. Analogamente, o gráfico não é simétrico em relação à origem pois substituir x por $-x$ e y por $-y$ dá $-x = (-y)^2$, que simplifica para $-x = y^2$, que de novo não é equivalente à equação original. Esses resultados são consistentes com o gráfico de $x = y^2$ mostrado na Figura 0.2.8. ◀

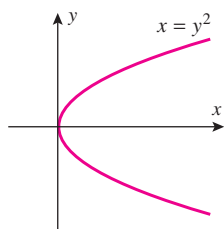


Figura 0.2.8

FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Dizemos que uma função f é uma **função par** se

$$f(-x) = f(x) \quad (8)$$

e uma **função ímpar** se

$$f(-x) = -f(x) \quad (9)$$

Geometricamente, os gráficos de funções pares são simétricos em relação ao eixo y , porque substituindo x por $-x$ na equação $y = f(x)$ dá $y = f(-x)$, que é equivalente à equação original $y = f(x)$ por (8) (ver Figura 0.2.9). Analogamente, segue a partir de (9) que

os gráficos de funções ímpares são simétricos em relação à origem (ver Figura 0.2.10). Alguns exemplos de funções pares são x^2 , x^4 , x^6 e $\cos x$; alguns exemplos de funções ímpares são x^3 , x^5 , x^7 e $\sin x$.

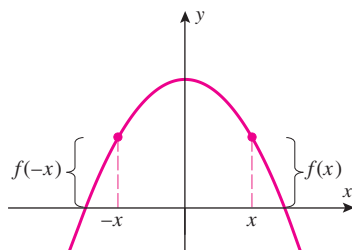


Figura 0.2.9 Este é o gráfico de uma função par, pois $f(-x) = f(x)$.

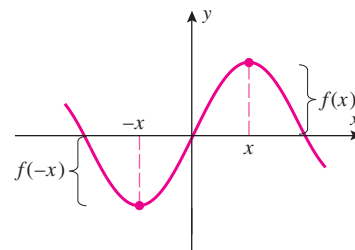


Figura 0.2.10 Este é o gráfico de uma função ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$.

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.2 (Ver página 27 para respostas.)

- Sejam $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ e $g(x) = |x|$. Em cada parte, dê a fórmula para a função e o correspondente domínio.
 - $f + g$: _____ Domínio: _____
 - $f - g$: _____ Domínio: _____
 - fg : _____ Domínio: _____
 - f/g : _____ Domínio: _____
- Sejam $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Em cada parte, dê a fórmula para a composição e o correspondente domínio.
 - $f \circ g$: _____ Domínio: _____
 - $g \circ f$: _____ Domínio: _____
- O gráfico de $y = 1 + (x - 2)^2$ pode ser obtido trasladando o gráfico de $y = x^2$ para a _____ (esquerda/direita) por _____ unidade(s) e depois trasladando o novo gráfico para _____ (cima/baixo) por _____ unidade(s).
- Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1|, & -2 \leq x \leq 0 \\ |x - 1|, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
 - A letra do alfabeto que mais se parece com o gráfico de f é _____.
 - f é uma função par?

EXERCÍCIOS 0.2 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = f(x) - 1$ (b) $y = f(x - 1)$
 (c) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (d) $y = f(-\frac{1}{2}x)$

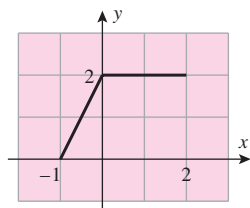


Figura Ex-1

2. Use o gráfico do Exercício 1 para esboçar os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = -f(-x)$ (b) $y = f(2 - x)$
 (c) $y = 1 - f(2 - x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(2x)$

3. O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = f(x + 1)$ (b) $y = f(2x)$
 (c) $y = |f(x)|$ (d) $y = 1 - |f(x)|$

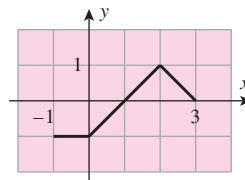


Figura Ex-3

4. Use o gráfico do Exercício 3 para esboçar o gráfico da equação $y = f(|x|)$.

5-24 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$, $y = |x|$ ou $y = \sqrt[3]{x}$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto. ■

5. $y = -2(x+1)^2 - 3$ 6. $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

7. $y = x^2 + 6x$ 8. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)$

9. $y = 3 - \sqrt{x+1}$ 10. $y = 1 + \sqrt{x-4}$

11. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$ 12. $y = -\sqrt{3x}$

13. $y = \frac{1}{x-3}$ 14. $y = \frac{1}{1-x}$

15. $y = 2 - \frac{1}{x+1}$ 16. $y = \frac{x-1}{x}$

17. $y = |x+2| - 2$ 18. $y = 1 - |x-3|$

19. $y = |2x-1| + 1$ 20. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

21. $y = 1 - 2\sqrt[3]{x}$ 22. $y = \sqrt[3]{x-2} - 3$

23. $y = 2 + \sqrt[3]{x+1}$ 24. $y + \sqrt[3]{x-2} = 0$

25. (a) Esboce o gráfico de $y = x + |x|$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = |x|$.
(b) Expresse a equação $y = x + |x|$ na forma por partes, sem valores absolutos e confirme que o gráfico obtido em (a) com essa equação é consistente.

26. Esboce o gráfico de $y = x + (1/x)$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = 1/x$. Use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

27-28 Determine as fórmulas para $f+g$, $f-g$, fg e f/g e obtenha os domínios das funções. ■

27. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

28. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

29. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Determine
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(4))$ (c) $f(f(16))$
(d) $g(g(0))$ (e) $f(2+h)$ (f) $g(3+h)$.

30. Seja $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre
(a) $g(5s+2)$ (b) $g(\sqrt{x}+2)$ (c) $3g(5x)$
(d) $\frac{1}{g(x)}$ (e) $g(g(x))$ (f) $(g(x))^2 - g(x^2)$
(g) $g(1/\sqrt{x})$ (h) $g((x-1)^2)$ (i) $g(x+h)$.

31-34 Determine as fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$ e estabeleça os domínios das compostas. ■

31. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

32. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x^2+3}$

33. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$

34. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

35-36 Encontre uma fórmula para $f \circ g \circ h$. ■

35. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^3$

36. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \frac{1}{x^3}$

37-42 Expresse f como uma composição de duas funções; isto é, encontre g e h tais que $f = g \circ h$. [Nota: Cada exercício tem mais de uma solução.] ■

37. (a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$

38. (a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

39. (a) $f(x) = \sin^2 x$ (b) $f(x) = \frac{3}{5 + \cos x}$

40. (a) $f(x) = 3 \sin(x^2)$ (b) $f(x) = 3 \sin^2 x + 4 \sin x$

41. (a) $f(x) = (1 + \sin(x^2))^3$ (b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$

42. (a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f(x) = |5 + 2x|$

43-46 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

43. O domínio de $f+g$ é a interseção dos domínios de f e de g .
44. O domínio de $f \circ g$ consiste em todos os valores de x no domínio de g nos quais $g(x) \neq 0$.
45. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y .
46. O gráfico de $y = f(x+2) + 3$ é obtido transladando o gráfico de $y = f(x)$ duas unidades para a direita e três para cima.

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Use a tabela abaixo para fazer um gráfico de $y = f(g(x))$.

Tabela Ex-47

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	0	1	2	3	-2	-3

48. Encontre o domínio de $f \circ g$ para as funções f e g do Exercício 47.
49. Esboce o gráfico de $y = f(g(x))$ para as funções cujos gráficos estão na figura abaixo.

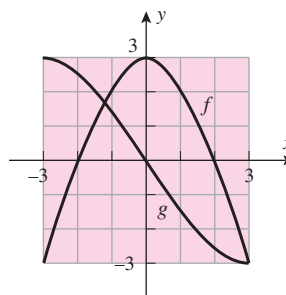


Figura Ex-49

50. Esboce o gráfico de $y = g(f(x))$ para as funções cujos gráficos estão no Exercício 49.
51. Use os gráficos de f e g do Exercício 49 para estimar as soluções das equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.
52. Use a tabela do Exercício 47 para resolver as equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.

53-56 Encontre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \frac{f(w) - f(x)}{w-x}$$

e simplifique tanto quanto possível. ■

53. $f(x) = 3x^2 - 5$

54. $f(x) = x^2 + 6x$

55. $f(x) = 1/x$

56. $f(x) = 1/x^2$

57. Classifique em pares, ímpares ou nenhuma dessas as funções cujos valores estão dados na tabela a seguir.

Tabela Ex-57

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	3	2	3	1	-3	5
$g(x)$	4	1	-2	0	2	-1	-4
$h(x)$	2	-5	8	-2	8	-5	2

58. Complete a tabela da figura abaixo de forma que o gráfico de $y = f(x)$ seja simétrico em relação(a) ao eixo y (b) à origem

Tabela Ex-58

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1		-1	0		-5	

59. A figura abaixo mostra uma parte de um gráfico. Complete o gráfico de forma que todo ele seja simétrico em relação

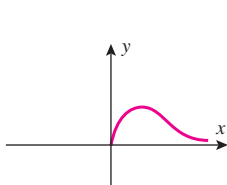
(a) ao eixo x (b) ao eixo y (c) à origem60. A figura abaixo mostra uma parte do gráfico de uma função f . Complete o gráfico supondo que(a) f é uma função par (b) f é uma função ímpar

Figura Ex-59

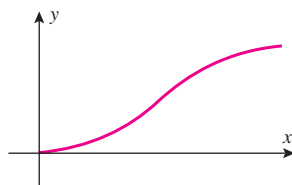
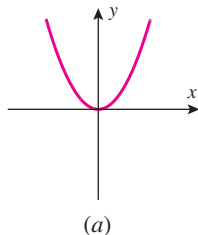


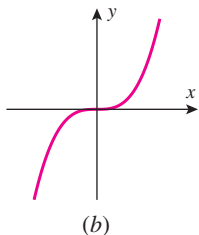
Figura Ex-60

61-62 Classifique as funções cujos gráficos estão nas figuras a seguir como pares, ímpares ou nenhum desses casos. ■

61.



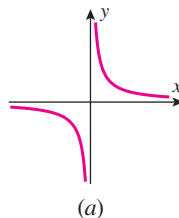
(a)



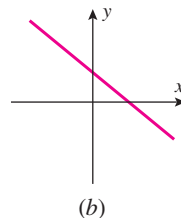
(b)

Figura Ex-61

62.



(a)



(b)

Figura Ex-62

63. Em cada parte, classifique a função como par, ímpar ou nenhum desses casos.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = x + 1$

(e) $f(x) = \frac{x^5 - x}{1 + x^2}$

(f) $f(x) = 2$

64. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Determine se cada uma das funções a seguir pode ser classificada como par ou ímpar. Explique.

(a) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

(b) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

65. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Mostre que f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. [Sugestão: Ver Exercício 64.]66-67 Use o Teorema 0.2.3 para determinar se os gráficos têm simetrias em relação ao eixo x , ao eixo y ou à origem. ■

66. (a) $x = 5y^2 + 9$

(b) $x^2 - 2y^2 = 3$

(c) $xy = 5$

67. (a) $x^4 = 2y^3 + y$

(b) $y = \frac{x}{3 + x^2}$

(c) $y^2 = |x| - 5$

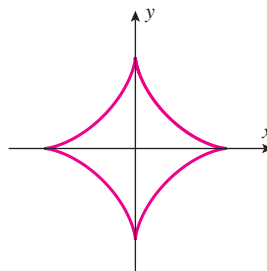
68-69 (i) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da equação no primeiro quadrante. [Nota: Para isso, resolva a equação para y em termos de x .] (ii) Use a simetria para fazer um esboço à mão de todo o gráfico. (iii) Confirme o que foi feito gerando o gráfico da equação nos demais quadrantes. ■

68. $9x^2 + 4y^2 = 36$

69. $4x^2 + 16y^2 = 16$

70. O gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que aparece na figura abaixo, é denominado **hipocicloide quadricúspide**.(a) Use o Teorema 0.2.3 para confirmar que esse gráfico é simétrico em relação ao eixo x , ao eixo y e à origem.(b) Encontre uma função f cujo gráfico no primeiro quadrante coincide com a hipocicloide quadricúspide e use um recurso computacional gráfico para confirmar o que foi feito.

(c) Repita (b) para os demais quadrantes.



Hipocicloide quadricúspide

Figura Ex-70

71. A equação $y = |f(x)|$ pode ser escrita como

$$y = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

que mostra que o gráfico de $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$, retendo a parte que está sobre ou acima do eixo x e refletindo por esse eixo a parte que está abaixo. Use esse método para obter o gráfico de $y = |2x - 3|$ a partir de $y = 2x - 3$.

72-73 Use o método descrito no Exercício 71. ■

72. Esboce o gráfico de $y = |1 - x^2|$.

73. Esboce o gráfico de

(a) $f(x) = |\cos x|$ (b) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

74. A **função maior inteiro**, $\lfloor x \rfloor$, é definida como sendo o maior inteiro que é menor do que ou igual a x . Por exemplo: $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor -2,3 \rfloor = -3$ e $\lfloor 4 \rfloor = 4$. Em cada parte, esboce o gráfico de $y = f(x)$.

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$
(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$ (d) $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$

75. É alguma vez verdade que $f \circ g = g \circ f$ se f e g forem funções não constantes? Se não, prove; se afirmativo, dê alguns exemplos para os quais é verdade.

✓ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.2

1. (a) $(f + g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 + x$; $x \geq 0$ (b) $(f - g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 - x$; $x \geq 0$ (c) $(fg)(x) = 3x^{3/2} - 2x$; $x \geq 0$

(d) $(f/g)(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{x}$; $x > 0$ 2. (a) $(f \circ g)(x) = 2 - x$; $x \geq 0$ (b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 - x^2}$; $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

3. direita; 2; cima; 1 4. (a) W (b) sim

0.3 FAMÍLIAS DE FUNÇÕES

As funções são, frequentemente, agrupadas em famílias de acordo com a forma das fórmulas que as definem ou outras características comuns. Nesta seção, vamos discutir algumas das famílias de funções mais básicas.

■ FAMÍLIAS DE CURVAS

O gráfico de uma função constante $f(x) = c$ é o gráfico da equação $y = c$, que é a reta horizontal mostrada na Figura 0.3.1a. Se variarmos c , obteremos um conjunto, ou uma **família**, de retas horizontais como as da Figura 0.3.1b.

As constantes que variamos para produzir uma família de curvas são denominadas **parâmetros**. Por exemplo, lembre que uma equação da forma $y = mx + b$ representa uma reta de inclinação m e corte com o eixo y em b . Se mantivermos b fixo e tratarmos m como um parâmetro, obteremos uma família de retas cujos membros têm, todos, o mesmo corte em b com o eixo y (Figura 0.3.2a), e se mantivermos m fixo e tratarmos b como um parâmetro, obteremos uma família de retas paralelas cujos membros têm, todos, a mesma inclinação m (Figura 0.3.2b).

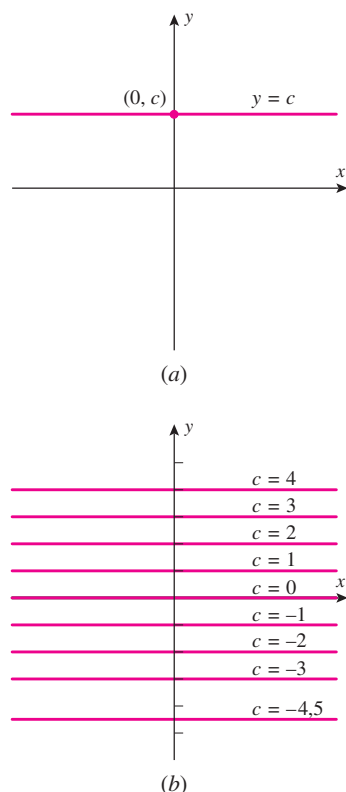


Figura 0.3.1

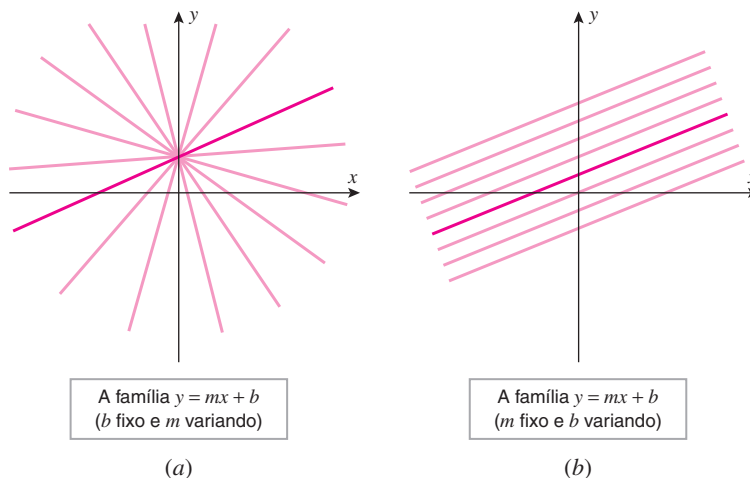


Figura 0.3.2

■ AS FUNÇÕES POTÊNCIA; A FAMÍLIA $y = x^n$

Uma função da forma $f(x) = x^p$, onde p é constante, é denominada **função potência**. Por enquanto, vamos considerar o caso em que p é um inteiro positivo, digamos $p = n$. Os gráficos das curvas $y = x^n$ com $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 0.3.3. O primeiro gráfico é o da reta $y = x$, cuja inclinação é 1 e passa pela origem, e o segundo é uma parábola que se abre para cima e tem seu vértice na origem.

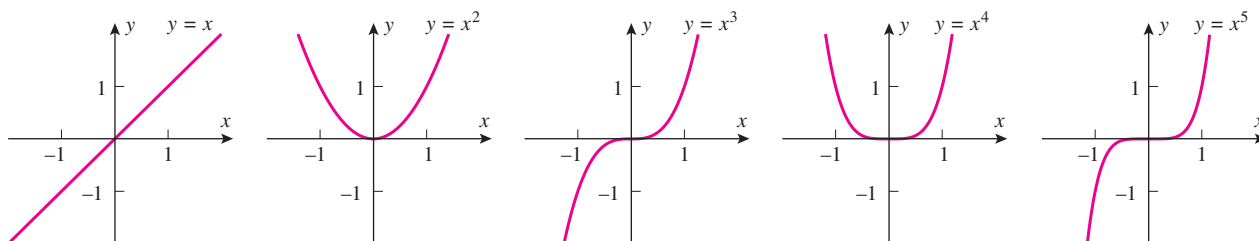


Figura 0.3.3

Para $n \geq 2$, o formato da curva $y = x^n$ depende de n ser par ou ímpar (Figura 0.3.4):

- Para valores pares de n , as funções $f(x) = x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y . Os gráficos têm todos o formato geral da parábola $y = x^2$, e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Para valores ímpares de n , as funções $f(x) = x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da cúbica $y = x^3$, e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.

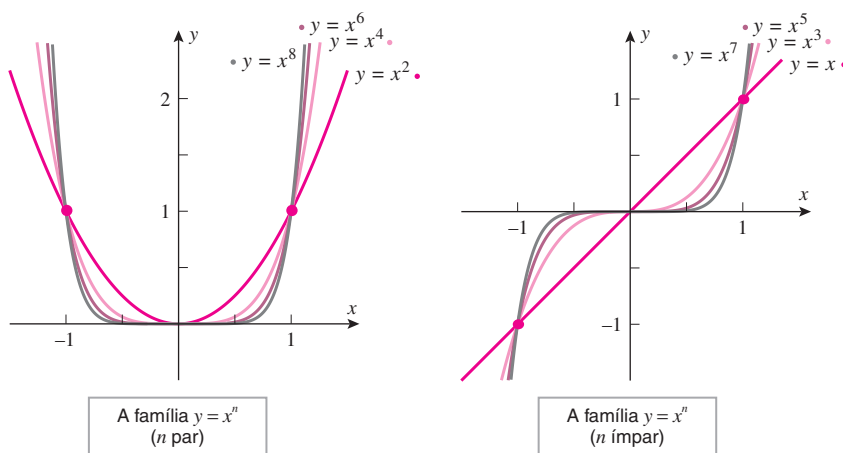


Figura 0.3.4

OBSERVAÇÃO

Os efeitos de achatar e de aproximar a vertical podem ser entendidos considerando o que ocorre quando um número x é elevado a potências mais e mais elevadas: se $-1 < x < 1$, então o valor absoluto de x^n *decrece* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesse intervalo sejam achatados com n crescente (tente elevar $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ a potências cada vez mais elevadas). Por outro lado, se $x > 1$ ou se $x < -1$, então o valor absoluto de x^n *cresce* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesses intervalos se aproximem da vertical com n crescente (tente elevar 2 ou -2 a potências cada vez mais elevadas).

■ A FAMÍLIA $y = x^{-n}$

Se p é um inteiro negativo, digamos $p = -n$, então as funções potência $f(x) = x^p$ tomam a forma $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$. A Figura 0.3.5 mostra os gráficos de $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$. O gráfico de $y = 1/x$ é denominado uma **hipérbole equilátera** (por razões que serão discutidas adiante).

Como mostra a Figura 0.3.5, o formato da curva $y = 1/x^n$ depende de n ser par ou ímpar:

- Para valores pares de n , as funções $f(x) = 1/x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y . Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x^2$ e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Para valores ímpares de n , as funções $f(x) = 1/x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x$ e cada gráfico passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Tanto para valores pares quanto ímpares de n , o gráfico $y = 1/x^n$ tem uma quebra na origem (denominada **descontinuidade**), que ocorre por não ser permitido dividir por zero.

Considerando os valores de $1/x^n$ para um x fixado com n crescente, explique por que os gráficos ficam mais achatados ou próximos da vertical para valores crescentes de n , conforme descrito no texto.

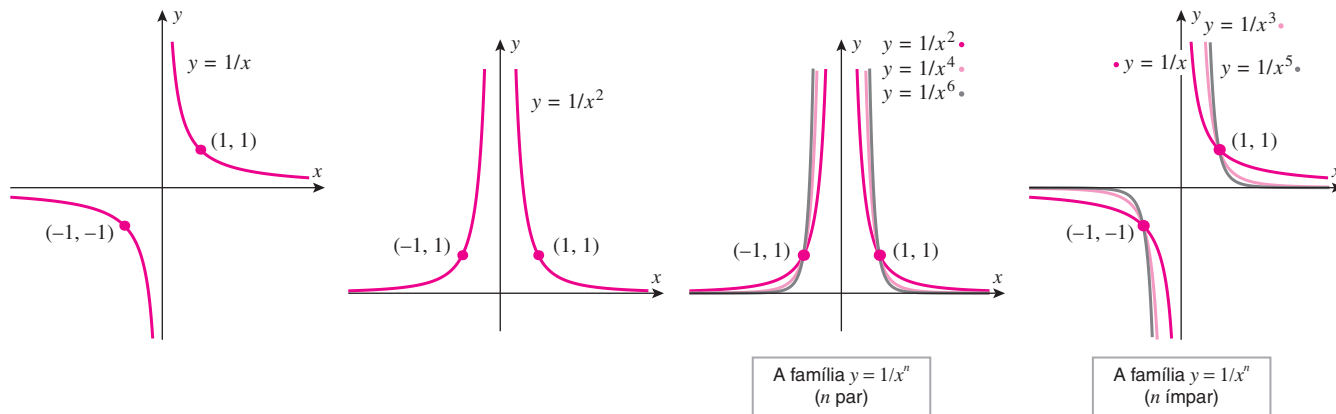


Figura 0.3.5

■ PROPORÇÕES INVERSAS

Lembre-se de que uma variável y diz-se **inversamente proporcional a uma variável x** se houver uma constante positiva k , denominada **constante de proporcionalidade**, tal que

$$y = \frac{k}{x} \quad (1)$$

Uma vez que se supõe k positiva, o gráfico de (1) tem a mesma forma básica que $y = 1/x$, mas é comprimido ou alongado na direção do eixo y . Também deveria ser evidente a partir de (1) que, duplicando x , multiplicamos y por $\frac{1}{2}$, e, triplicando x , multiplicamos y por $\frac{1}{3}$ e assim por diante.

A Equação (1) pode ser expressa como $xy = k$, que nos diz que o produto de grandezas inversamente proporcionais é uma constante positiva. Essa é uma forma útil de identificar proporcionalidade inversa em dados experimentais.

Tabela 0.3.1

x	0,8	1	2,5	4	6,25	10
y	6,25	5	2	1,25	0,8	0,5

► **Exemplo 1** A Tabela 0.3.1 mostra alguns dados experimentais.

- Explique por que os dados sugerem que y é inversamente proporcional a x .
- Expresse y como uma função de x .
- Faça um gráfico da função e dos dados juntos para $x > 0$.

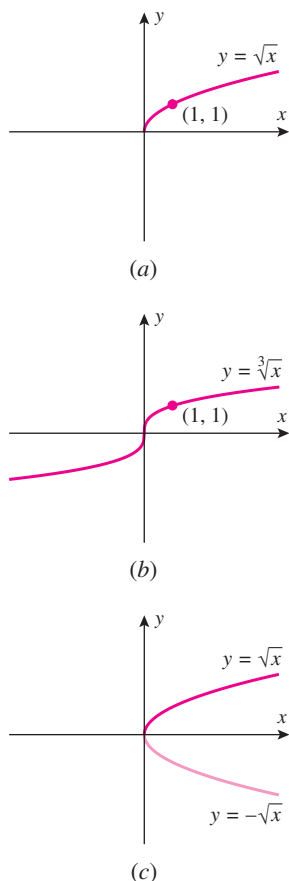


Figura 0.3.8

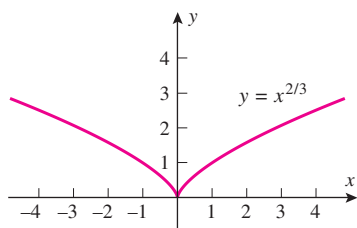


Figura 0.3.9

Solução Para cada ponto dos dados, temos $xy = 5$, portanto y é inversamente proporcional a x e $y = 5/x$. O gráfico dessa equação com os pontos dados está na Figura 0.3.6. ◀

As proporções inversas surgem em várias leis da Física. Por exemplo, a **lei de Boyle** afirma que *se uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a uma temperatura constante, então é constante o produto da pressão P exercida pelo gás e o volume V que ele ocupa*, ou seja,

$$PV = k$$

Isso implica que as variáveis P e V são inversamente proporcionais uma à outra. A Figura 0.3.7 mostra um típico gráfico de volume *versus* pressão sob as condições da lei de Boyle. Observe como, dobrando a pressão, reduzimos o volume à metade, como era de se esperar.

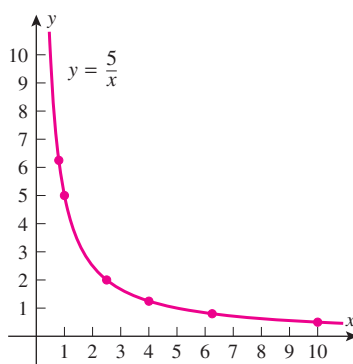


Figura 0.3.6

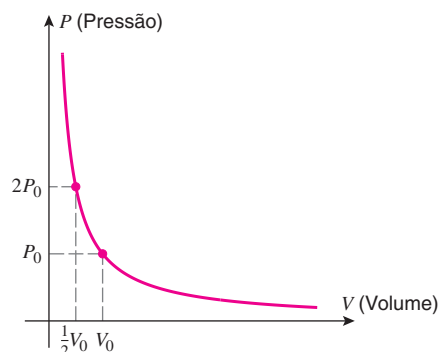


Figura 0.3.7 Dobrando a pressão, reduzimos o volume à metade.

■ FUNÇÕES POTÊNCIAS COM EXPOENTES NÃO INTEIROS

Se $p = 1/n$, onde n é um inteiro positivo, então as funções potências $f(x) = x^p$ têm a forma

$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Em particular, se $n = 2$, então $f(x) = \sqrt{x}$; e se $n = 3$, então $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Os gráficos dessas funções estão nas partes (a) e (b) da Figura 0.3.8.

Como cada número real tem uma raiz cúbica, o domínio da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $(-\infty, +\infty)$, de modo que o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ se estende sobre todo o eixo x . Contrastando com esse comportamento, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ se estende somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$, pois $\sqrt{x}$ é um número imaginário com x negativo. Como ilustra a Figura 0.3.8c, os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e de $y = -\sqrt{x}$ constituem, respectivamente, as porções superior e inferior da parábola $x = y^2$. Em geral, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ se estende sobre todo o eixo x se n for ímpar, mas somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$ se n for par.

As funções potência podem ter outros expoentes fracionários. Alguns exemplos são

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x^3}, \quad f(x) = x^{-7/8} \quad (2)$$

O gráfico de $f(x) = x^{2/3}$ aparece na Figura 0.3.9. Adiante discutiremos expressões envolvendo expoentes irracionais.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Às vezes os recursos gráficos omitem partes de um gráfico de uma função envolvendo expoentes fracionários (ou radicais). Se $f(x) = x^{p/q}$, em que p/q é uma fração positiva em forma irredutível, esse problema pode ser evitado como segue:

- Se p for par e q ímpar, faça o gráfico de $g(x) = |x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.
- Se p e q forem ímpares, faça o gráfico de $g(x) = (|x|/x)|x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.

Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $f(x) = x^{-7/8}$ que exibam todos os seus aspectos significativos.

POLINÔMIOS

Um **polinômio em x** é uma função expressa como uma soma finita de termos da forma cx^n , em que c é uma constante e n é um inteiro não negativo. Alguns exemplos de polinômios são

$$2x + 1, \quad 3x^2 + 5x - \sqrt{2}, \quad x^3, \quad 4 (= 4x^0), \quad 5x^7 - x^4 + 3$$

A função $(x^2 - 4)^3$ é também um polinômio, pois pode ser expandida pela fórmula binomial (veja no final do livro) e expressa, então, como uma soma de termos da forma cx^n :

$$(x^2 - 4)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(4) + 3(x^2)(4^2) - (4^3) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 \quad (3)$$

Um polinômio geral pode ser escrito em qualquer uma das formas a seguir, dependendo se quisermos as potências de x em ordem crescente ou decrescente:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

As constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ são denominadas **coeficientes** do polinômio. Quando um polinômio é representado em uma dessas formas, a mais alta potência que ocorre com um coeficiente não nulo é denominada **grau** do polinômio. Os polinômios constantes não nulos são considerados como tendo grau 0, uma vez que podemos escrever $c = cx^0$. Os polinômios de grau 1, 2, 3, 4 e 5 são descritos como **lineares**, **quadráticos**, **cúbicos**, **quárticos** e **quinticos**, respectivamente. Por exemplo:

$3 + 5x$ tem grau 1 (linear)	$x^2 - 3x + 1$ tem grau 2 (quadrático)	$2x^3 - 7$ tem grau 3 (cúbico)
$8x^4 - 9x^3 + 5x - 3$ tem grau 4 (quártico)	$\sqrt{3} + x^3 + x^5$ tem grau 5 (quintico)	$(x^2 - 4)^3$ tem grau 6 [veja (3)]

O domínio natural de um polinômio em x é $(-\infty, +\infty)$, já que as únicas operações envolvidas são multiplicações e adições; a imagem depende do polinômio. Já sabemos que os gráficos dos polinômios de grau 0 e 1 são retas e que os gráficos dos polinômios de grau 2 são parábolas. A Figura 0.3.10 mostra os gráficos de alguns polinômios típicos de graus superiores. Discutiremos mais adiante gráficos de polinômios em detalhes; por ora, é suficiente observar que eles são muito bem comportados no sentido de não terem descontinuidades ou bicos agudos. Conforme ilustrado na Figura 0.3.10, os gráficos dos polinômios, durante um certo tempo, vão para baixo e para cima como em uma montanha-russa, para depois subir ou cair indefinidamente, à medida que percorremos a curva em qualquer um dos dois sentidos. Veremos posteriormente que o número de picos e de vales é determinado pelo grau do polinômio.

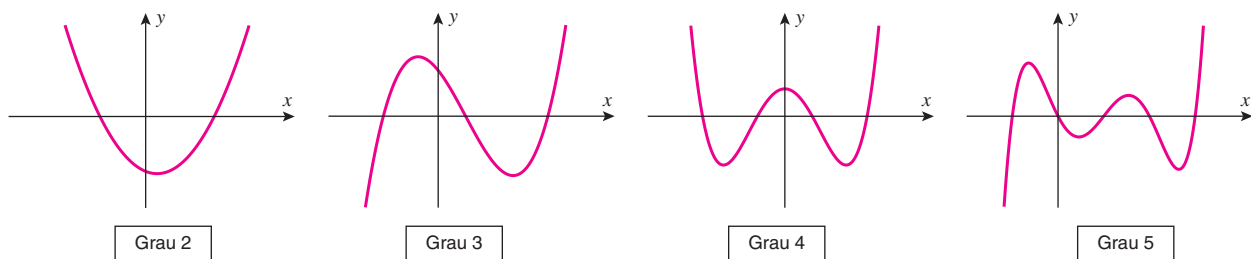


Figura 0.3.10

FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função que pode ser expressa como uma razão de dois polinômios é denominada **função racional**. Se $P(x)$ e $Q(x)$ forem polinômios, então o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Uma revisão mais detalhada sobre polinômios é apresentada no Apêndice C.

A constante 0 é um polinômio denominado **polinômio zero** ou **nulo**. Neste texto, consideramos indefinido o grau do polinômio zero. Outros textos podem adotar convenções distintas.

consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Por exemplo, o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

consiste em todos os valores de x , exceto $x = 1$ e $x = -1$. Seu gráfico está na Figura 0.3.11, junto aos gráficos de duas outras funções racionais típicas.

Os gráficos das funções racionais com denominadores não constantes diferem dos gráficos dos polinômios de algumas formas essenciais:

- Diferentemente dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas (não quebradas), os gráficos das funções racionais têm descontinuidades nos pontos onde o denominador é zero.
- Diferentemente dos polinômios, as funções racionais podem ter números nos quais não estão definidas. Perto desses pontos, muitas funções racionais têm gráficos que se aproximam bastante de uma reta vertical, denominada **assíntota vertical**. Na Figura 0.3.11, essas assíntotas estão representadas por linhas tracejadas.
- Diferentemente dos gráficos dos polinômios não constantes, os quais começam e terminam subindo ou descendo indefinidamente, os gráficos de muitas funções racionais podem começar ou terminar cada vez mais perto de uma reta horizontal, denominada **assíntota horizontal**, quando se percorre a curva em qualquer um dos dois sentidos. As assíntotas estão representadas pelas linhas tracejadas horizontais nas duas primeiras partes da Figura 0.3.11. Na terceira parte da figura, uma assíntota horizontal é o eixo x .

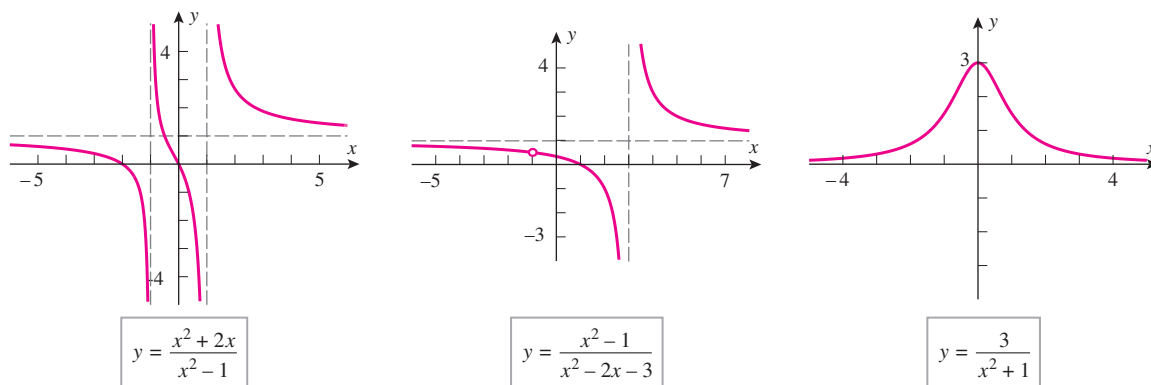


Figura 0.3.11

■ FUNÇÕES ALGÉBRICAS

As funções que podem ser construídas com polinômios, aplicando-se um número finito de operações algébricas (adição, subtração, divisão e extração de raízes), são denominadas **funções algébricas**. Alguns exemplos são:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad f(x) = 3\sqrt[3]{x}(2 + x), \quad f(x) = x^{2/3}(x + 2)^2$$

Conforme ilustrado na Figura 0.3.12, os gráficos das funções algébricas variam amplamente; assim sendo, é difícil fazer afirmativas genéricas sobre elas. Mais adiante no livro, vamos desenvolver métodos gerais do Cálculo que permitem analisar essas funções.

■ AS FAMÍLIAS $y = A \sin Bx$ E $y = A \cos Bx$

Muitas aplicações importantes levam a funções trigonométricas do tipo

$$f(x) = A \sin(Bx - C) \quad \text{e} \quad g(x) = A \cos(Bx - C) \quad (4)$$

Neste texto, vamos supor que a variável independente de uma função trigonométrica seja dada em radianos, a menos de menção explícita em contrário. Uma revisão de funções trigonométricas pode ser encontrada no Apêndice B.

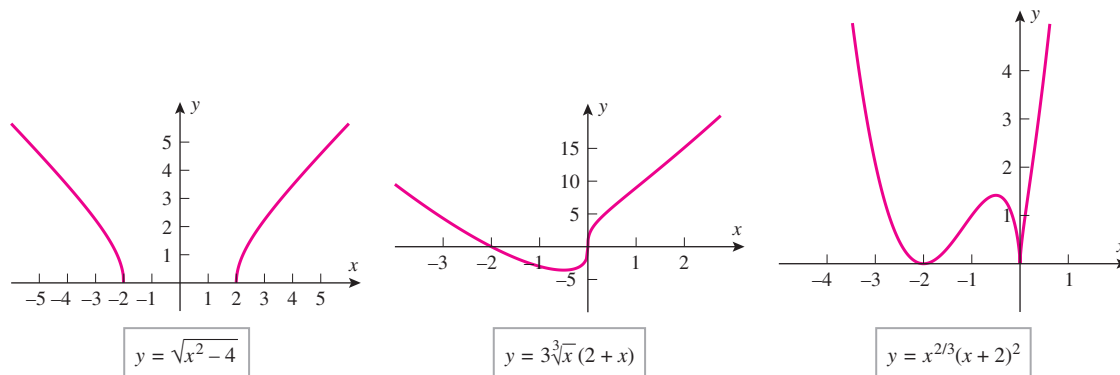


Figura 0.3.12

em que A , B e C são constantes não nulas. Os gráficos dessas funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente os gráficos de $y = \sin x$ e de $y = \cos x$. Para ver isso, vamos começar com o caso $C = 0$ e considerar como os gráficos das equações

$$y = A \sin Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

se relacionam com os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$. Se A e B forem positivos, então o efeito da constante A é alongar ou comprimir verticalmente os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$ por um fator A , enquanto o de B é fazer o mesmo, porém horizontalmente por um fator B . Por exemplo, o gráfico de $y = 2 \sin 4x$ pode ser obtido alongando verticalmente o de $y = \sin x$ por um fator 2 e comprimindo horizontalmente por um fator 4. (Lembre-se da Seção 0.2, em que vimos que o multiplicador de x *alonga* quando for menor que 1 e *comprime* quando maior que 1.) Assim, como mostra a Figura 0.3.13, o gráfico de $y = 2 \sin 4x$ varia entre -2 e 2 e repete-se a cada $2\pi/4 = \pi/2$ unidades.

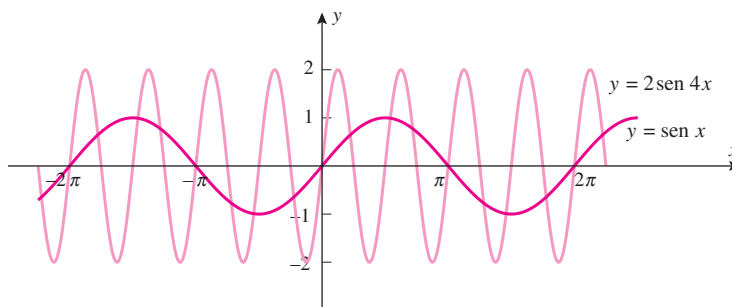


Figura 0.3.13

Em geral, se A e B forem números positivos, então os gráficos de

$$y = A \sin Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

oscilam entre $-A$ e A e repetem-se a cada $2\pi/B$ unidades. Assim, dizemos que essas funções têm **amplitude** A e **período** $2\pi/B$. Além disso, definimos a **frequência** dessas funções como sendo o recíproco do período, ou seja, $B/2\pi$. Se A ou B for negativo, além da compressão e do alongamento, teremos reflexões dos gráficos pelos eixos; nesse caso, a amplitude, o período e a frequência são dados por

$$\text{amplitude} = |A|, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{|B|}, \quad \text{frequência} = \frac{|B|}{2\pi}$$

► **Exemplo 2** Faça um esboço dos seguintes gráficos que mostre o período e a amplitude.

$$(a) y = 3 \sin 2\pi x \quad (b) y = -3 \cos 0,5x \quad (c) y = 1 + \sin x$$

Solução (a) A equação é do tipo $y = A \sin Bx$ com $A = 3$ e $B = 2\pi$, portanto o gráfico tem a forma de uma função seno, mas com amplitude $A = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/2\pi = 1$ (Figura 0.3.14a).

Solução (b) A equação é do tipo $y = A \cos Bx$ com $A = -3$ e $B = 0,5$, portanto o gráfico tem a forma de uma função cosseno que foi refletida em torno do eixo x (pois $A = -3$ é negativa), mas com amplitude $|A| = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/0,5 = 4\pi$ (Figura 0.3.14b).

Solução (c) O gráfico tem a forma de uma função seno que foi transladada uma unidade para cima (Figura 0.3.14c). ◀

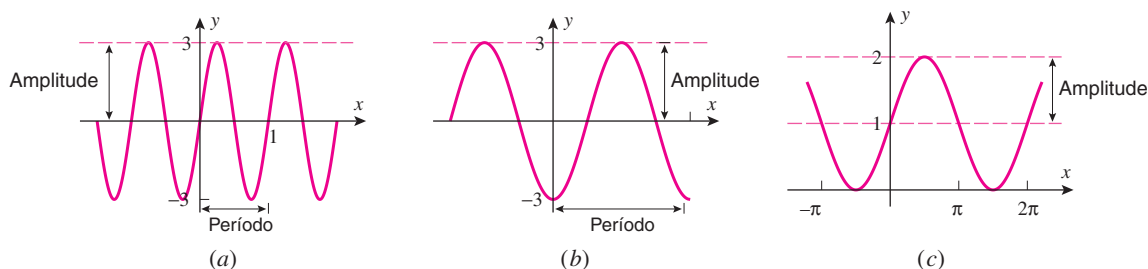


Figura 0.3.14

■ AS FAMÍLIAS $y = A \sin(Bx - C)$ E $y = A \cos(Bx - C)$

Para investigar os gráficos das famílias mais gerais

$$y = A \sin(Bx - C) \quad \text{e} \quad y = A \cos(Bx - C)$$

será útil reescrevê-las na forma

$$y = A \sin \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right] \quad \text{e} \quad y = A \cos \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right]$$

Assim, vemos que os gráficos dessas equações podem ser obtidos transladando os gráficos de $y = A \sin Bx$ e $y = A \cos Bx$ para a esquerda ou para a direita, dependendo do sinal de C/B . Por exemplo, se $C/B > 0$, então o gráfico de

$$y = A \sin[B(x - C/B)] = A \sin(Bx - C)$$

pode ser obtido transladando o de $y = A \sin Bx$ para a direita em C/B unidades (Figura 0.3.15). Se $C/B < 0$, o gráfico de $y = A \sin(Bx - C)$ é obtido por translação do gráfico de $y = A \sin Bx$ para a esquerda por $|C/B|$ unidades.

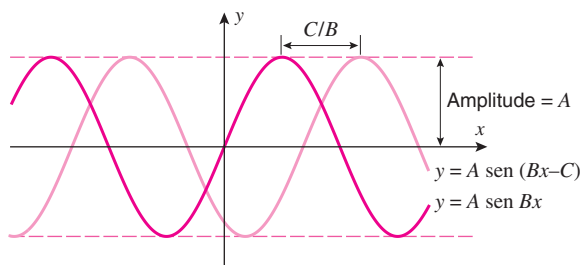


Figura 0.3.15

► **Exemplo 3** Encontre a amplitude e o período de

$$y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

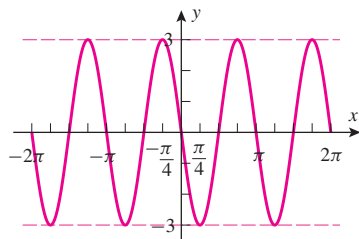


Figura 0.3.16

e determine como deveria ser transladado o gráfico de $y = 3 \cos 2x$ para produzir o gráfico dessa equação. Confirme seu resultado fazendo o gráfico da equação em uma calculadora ou computador.

Solução A equação pode ser reescrita como

$$y = 3 \cos \left[2x - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3 \cos \left[2 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

que é do tipo

$$y = A \cos \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right]$$

com $A = 3$, $B = 2$ e $C/B = -\pi/4$. Segue-se que a amplitude é $A = 3$, o período é $2\pi/B = \pi$ e o gráfico é obtido transladando o gráfico de $y = 3 \cos 2x$ para a esquerda por $|C/B| = \pi/4$ unidades (Figura 0.3.16). ◀

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.3 (Ver página 38 para respostas.)

- Considere a família de funções $y = x^n$, em que n é um inteiro. Os gráficos de $y = x^n$ são simétricos em relação ao eixo y se n for _____. Esses gráficos são simétricos em relação à origem se n for _____. O eixo y é uma assíntota vertical desses gráficos se n for _____.
- Qual é o domínio natural de um polinômio?
- Considere a família de funções $y = x^{1/n}$, em que n é um inteiro não nulo. Encontre o domínio natural dessas funções se n for
 - positivo e par
 - positivo e ímpar
 - negativo e par
 - negativo e ímpar.
- Classifique cada equação como polinomial, racional, algébrica ou não uma função algébrica.
 - $y = \sqrt{x} + 2$
 - $y = \sqrt{3}x^4 - x + 1$
 - $y = 5x^3 + \cos 4x$
 - $y = \frac{x^2 + 5}{2x - 7}$
 - $y = 3x^2 + 4x^{-2}$
- O gráfico de $y = A \sin Bx$ tem amplitude _____ e é periódico de período _____.

EXERCÍCIOS 0.3 Recurso Gráfico

- Encontre uma equação para a família de retas cujos membros têm inclinação $m = 3$.
 - Encontre uma equação para o membro da família que passe por $(-1, 3)$.
 - Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).
- Encontre uma equação para a família de retas cujos membros são perpendiculares àqueles do Exercício 1.
- Encontre uma equação para a família de retas com corte no eixo y igual a $b = 2$.
 - Encontre uma equação para o membro da família cujo ângulo de inclinação é 135° .
 - Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).
- Encontre uma equação para
 - a família de retas passando pela origem.
 - a família de retas com corte no eixo x igual a $a = 1$.
 - a família de retas que passam pelo ponto $(1, -2)$.
 - a família de retas paralelas a $2x + 4y = 1$.
- Encontre uma equação para a família de retas tangentes ao círculo com centro na origem e raio 3.
- Encontre uma equação para a família de retas que passam pela intersecção de $5x - 3y + 11 = 0$ e $2x - 9y + 7 = 0$.
- O Imposto de Renda dos EUA usa um sistema de depreciação linear de 10 anos para determinar o valor de vários itens comerciais. Isso significa que se supõe que um item tenha valor zero no final do décimo ano e que, em tempos intermediários, o valor é uma função linear do tempo decorrido. Esboce algumas retas de depreciação típicas e explique o significado do prático do corte com o eixo y .
- Encontre todas as retas por $(6, -1)$ para as quais o produto dos cortes nos eixos x e y seja 3.

ENFOCANDO CONCEITOS

9-10 Estabeleça uma propriedade geométrica comum a todas as retas da família e esboce cinco dessas retas. ■

- a família $y = -x + b$
 - a família $y = mx - 1$
 - a família $y = m(x + 4) + 2$
 - a família $x - ky = 1$

10. (a) a família $y = b$
 (b) a família $Ax + 2y + 1 = 0$
 (c) a família $2x + By + 1 = 0$
 (d) a família $y - 1 = m(x + 1)$
11. Em cada parte, combine a equação com um dos gráficos dados.
- (a) $y = \sqrt[5]{x}$ (b) $y = 2x^5$
 (c) $y = -1/x^8$ (d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
 (e) $y = \sqrt[4]{x - 2}$ (f) $y = -\sqrt[5]{x^2}$

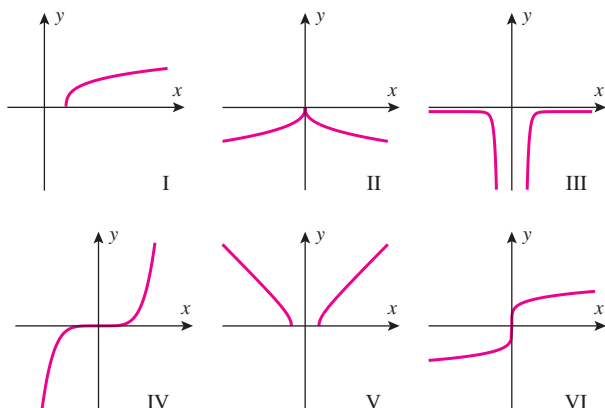


Figura Ex-11

12. A tabela abaixo dá valores aproximados de três funções: uma da forma kx^2 , outra da forma kx^{-3} e a terceira da forma $kx^{3/2}$. Identifique cada uma e dê uma estimativa de k em cada caso.

Tabela Ex-12

x	0,25	0,37	2,1	4,0	5,8	6,2	7,9	9,3
$f(x)$	640	197	1,08	0,156	0,0513	0,0420	0,0203	0,0124
$g(x)$	0,0312	0,0684	2,20	8,00	16,8	19,2	31,2	43,2
$h(x)$	0,250	0,450	6,09	16,0	27,9	30,9	44,4	56,7

13-14 Esboce o gráfico da equação para $n = 1, 3$ e 5 em um sistema de coordenadas e para $n = 2, 4$ e 6 em outro sistema de coordenadas. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

13. (a) $y = -x^n$ (b) $y = 2x^{-n}$ (c) $y = (x - 1)^{1/n}$
 14. (a) $y = 2x^n$ (b) $y = -x^{-n}$ (c) $y = -3(x + 2)^{1/n}$
15. (a) Esboce o gráfico de $y = ax^2$ com $a = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (b) Esboce o gráfico de $y = x^2 + b$ com $b = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (c) Esboce alguns membros típicos da família de curvas $y = ax^2 + b$.
16. (a) Esboce o gráfico de $y = a\sqrt{x}$ com $a = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.

- (b) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{x} + b$ com $b = \pm 1, \pm 2$ e ± 3 em um único sistema de coordenadas.
 (c) Esboce alguns membros típicos da família de curvas $y = a\sqrt{x} + b$.

17-18 Esboce o gráfico da equação fazendo as transformações apropriadas no gráfico de uma função potência básica. Confira seu trabalho com um recurso gráfico. ■

17. (a) $y = 2(x + 1)^2$ (b) $y = -3(x - 2)^3$
 (c) $y = \frac{-3}{(x + 1)^2}$ (d) $y = \frac{1}{(x - 3)^5}$
18. (a) $y = 1 - \sqrt{x + 2}$ (b) $y = 1 - \sqrt[3]{x + 2}$
 (c) $y = \frac{5}{(1 - x)^3}$ (d) $y = \frac{2}{(4 + x)^4}$

19. Esboce o gráfico de $y = x^2 + 2x$ completando o quadrado e fazendo as transformações apropriadas no gráfico de $y = x^2$.

20. (a) Use o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para ajudar a esboçar o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.
 (b) Use o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ para ajudar a esboçar o gráfico de $y = \sqrt[3]{|x|}$.

21. Conforme discutido nesta seção, a lei de Boyle estabelece que, a uma temperatura constante, a pressão P exercida por um gás está relacionada ao volume V pela equação $PV = k$.

- (a) Encontre as unidades apropriadas para a constante k se a pressão (que é força por unidade de área) for em newtons por metro quadrado (N/m^2) e o volume, em metros cúbicos (m^3).
 (b) Encontre k se o gás exercer uma pressão de 20.000 N/m^2 quando o volume for de 1 litro ($0,001 \text{ m}^3$).
 (c) Faça uma tabela que mostre as pressões para volumes de 0,25; 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0 litros.
 (d) Faça um gráfico de P versus V .

22. Um fabricante de recipientes impermeabilizados de papelão para bebidas quer construí-los na forma de um paralelepípedo fechado com base quadrada e capacidade de 1/10 litro (100 cm^3). Dê uma estimativa para as dimensões do recipiente que requer a menor quantidade de material para sua fabricação.

23-24 Uma variável y se diz ser *inversamente proporcional ao quadrado de uma variável x* se y estiver relacionada com x por uma equação da forma $y = k/x^2$, em que k é uma constante não nula denominada *constante de proporcionalidade*. Essa terminologia é usada nestes exercícios. ■

23. De acordo com a *lei de Coulomb*, a força F de atração entre duas cargas pontuais positiva e negativa é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre elas.
 (a) Supondo que a força de atração entre as cargas seja de 0,0005 newton quando a distância entre elas for de 0,3 metro, encontre a constante de proporcionalidade (com unidades apropriadas).
 (b) Encontre a força de atração das cargas pontuais quando elas estiverem a 3 metros uma da outra.
 (c) Faça um gráfico da força versus distância para as duas cargas.

- (d) O que acontece com a força se as partículas ficarem cada vez mais perto uma da outra? O que acontece se ficarem cada vez mais longe uma da outra?
24. Segue a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton que o peso P de um objeto, em relação à Terra, é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre o objeto e o centro da Terra, isto é, $P = C/x^2$.
- (a) Supondo que um satélite meteorológico pese 900 kg na superfície da Terra e que a Terra seja uma esfera com raio de 6.400 km, ache a constante C .
- (b) Encontre o peso do satélite quando estiver 1.600 km acima da superfície da Terra.
- (c) Faça um gráfico do peso do satélite *versus* sua distância ao centro da Terra.
- (d) Há alguma distância do centro da Terra na qual o peso do satélite seja zero? Explique seu raciocínio.
- 25-28 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■
25. Cada curva da família $y = 2x + b$ é paralela à reta $y = 2x$.
26. Cada curva da família $y = x^2 + bx + c$ é uma translação do gráfico de $y = x^2$.
27. Se uma curva passa pelo ponto $(2, 6)$ e y é inversamente proporcional a x , então a constante de proporcionalidade é 3.
28. As curvas da família $y = -5 \sin(A\pi x)$ têm amplitude 5 e período $2/|A|$.

ENFOCANDO CONCEITOS

29. Combine a equação com seu gráfico na figura a seguir e determine as equações para as assíntotas verticais e horizontais.

(a) $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ (b) $y = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$

(c) $y = \frac{2x^4}{x^4 + 1}$ (d) $y = \frac{4}{(x + 2)^2}$

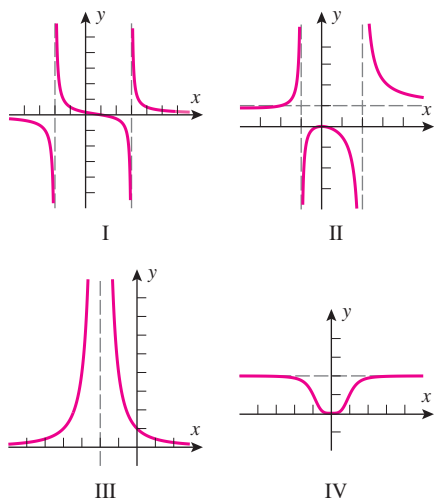


Figura Ex-29

30. Encontre uma equação da forma $y = k/(x^2 + bx + c)$ cujo gráfico se adeque razoavelmente com o da figura abaixo. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

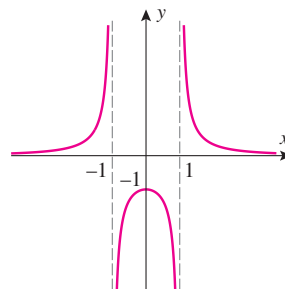


Figura Ex-30

- 31-32 Encontre uma equação da forma $y = D + A \sin Bx$ ou $y = D + A \cos Bx$ para cada gráfico. ■

31.

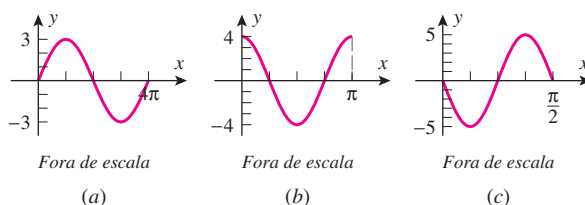


Figura Ex-31

32.

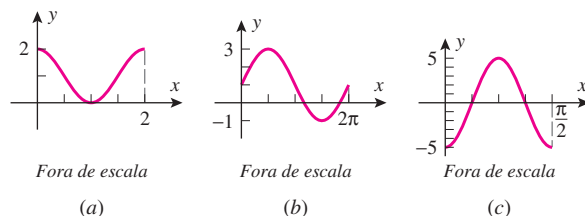


Figura Ex-32

33. Em cada parte, encontre uma equação para o gráfico que tenha a forma $y = y_0 + A \sin(Bx - C)$.

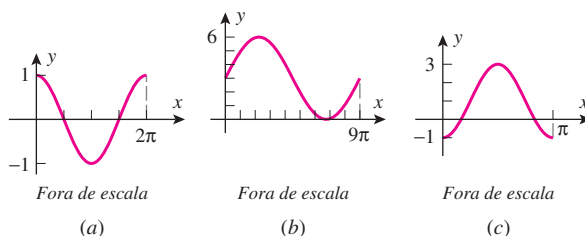


Figura Ex-33

34. Nos EUA, as tomadas elétricas padrão fornecem uma corrente elétrica senoidal com uma voltagem máxima de $V = 120\sqrt{2}$ volts (V), a uma frequência de 60 hertz (Hz). Escreva uma equação que expresse V como uma função do tempo t , supondo que $V = 0$ se $t = 0$. [Nota: 1 Hz = 1 ciclo por segundo.]

35-36 Encontre a amplitude e o período e esboce pelo menos dois períodos do gráfico à mão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

35. (a) $y = 3 \sin 4x$ (b) $y = -2 \cos \pi x$
 (c) $y = 2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
36. (a) $y = -1 - 4 \sin 2x$ (b) $y = \frac{1}{2} \cos(3x - \pi)$
 (c) $y = -4 \sin\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right)$

37. Equações da forma

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

surtem no estudo de vibrações e de outros movimentos periódicos. Expresse a equação

$$x = 5\sqrt{3} \sin 2\pi t + \frac{5}{2} \cos 2\pi t$$

na forma $x = A \sin(\omega t + \theta)$ e use um recurso gráfico para confirmar que ambas as equações têm o mesmo gráfico.

38. Determine o número de soluções de $x = 2 \sin x$ e use um recurso computacional ou gráfico para obter um valor aproximado dessas soluções.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.3

1. par; ímpar; negativo 2. $(-\infty, +\infty)$ 3. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, +\infty)$ (c) $(0, +\infty)$ (d) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 4. (a) algébrica (b) polinomial (c) não algébrica (d) racional (e) racional 5. $|A|; 2\pi/|B|$

0.4 FUNÇÕES INVERSAS; FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Na linguagem do dia a dia, o termo “inverter” tem a conotação de virar em sentido contrário. Por exemplo, em Meteorologia, uma inversão térmica é uma troca das propriedades de temperaturas usuais das camadas atmosféricas e, em Música, uma inversão melódica troca um intervalo ascendente pelo correspondente intervalo descendente. Em Matemática, o termo **inverter** é utilizado para descrever uma função que troca de volta o que uma outra função faz, ou seja, cada uma desfaz o efeito da outra. Nesta seção, discutiremos essa ideia matemática fundamental. Em particular, introduziremos as funções trigonométricas inversas para atacar o problema de recuperar um ângulo que possa ter produzido um certo valor de uma função trigonométrica.

FUNÇÕES INVERSAS

A ideia de resolver uma equação $y = f(x)$ em x como uma função de y , digamos $x = g(y)$, é uma das mais importantes na Matemática. Às vezes, resolver essa equação é um processo simples; por exemplo, usando álgebra básica, a equação

$$y = x^3 + 1 \quad \boxed{y = f(x)}$$

pode ser resolvida em x como uma função de y :

$$x = \sqrt[3]{y-1} \quad \boxed{x = g(y)}$$

A primeira equação é melhor para calcular y se x for conhecido, e a segunda é melhor para calcular x se y for conhecido (Figura 0.4.1).

Nosso interesse fundamental nesta seção é identificar relações que possam existir entre as funções f e g quando uma função $y = f(x)$ for expressa como $x = g(y)$, ou ao contrário. Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = x^3 + 1$ e $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Quando essas funções forem compostas em qualquer ordem, uma cancela o efeito da outra, ou seja,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{f(x)-1} = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = x \\ f(g(y)) &= [g(y)]^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y \end{aligned} \quad (1)$$

Os pares de funções com essas duas propriedades são tão importantes que há uma terminologia específica para elas.

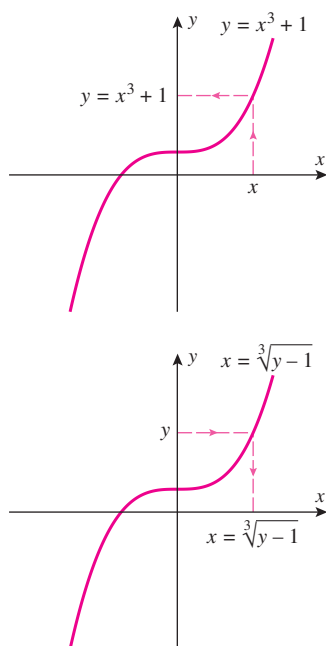


Figura 0.4.1

0.4.1 DEFINIÇÃO Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$g(f(x)) = x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f$$

$$f(g(y)) = y \text{ em cada } y \text{ do domínio de } g$$

dizemos que f e g são **funções inversas** uma da outra, ou então que **f é uma inversa de g e g é uma inversa de f** .

ADVERTÊNCIA

Se f é uma função, então o -1 no símbolo f^{-1} sempre denota a inversa, e *nunca* um expoente; ou seja:

$$f^{-1}(x) \text{ nunca significa } \frac{1}{f(x)}$$

Pode ser mostrado (Exercício 62) que, se uma função f tiver uma inversa, então essa inversa será única. Assim, se uma função f tiver uma inversa, teremos o direito de falar “da” inversa de f , caso em que passamos a denotá-la pelo símbolo f^{-1} .

► **Exemplo 1** As contas feitas em (1) mostram que $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ é a inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Assim, podemos escrever g em notação de inversa como

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

e podemos escrever as equações na Definição 0.4.1 como

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f \\ f(f^{-1}(y)) &= y \text{ em cada } y \text{ do domínio de } f^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Referimo-nos a essas equações como as **equações do cancelamento** de f e f^{-1} . ◀

MUDANÇA DA VARIÁVEL INDEPENDENTE

As fórmulas em (2) usam x como a variável independente de f e y como a variável independente de f^{-1} . Embora muitas vezes seja conveniente utilizar variáveis diferentes para f e f^{-1} , frequentemente é desejável utilizar a mesma variável independente para ambas. Por exemplo, se quisermos esboçar os gráficos de f e de f^{-1} juntos no mesmo sistema de coordenadas xy , utilizaremos a mesma variável independente x e a mesma variável dependente y para ambas as funções. Assim, para esboçar o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 1$ e $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ do Exemplo 1 no mesmo sistema de coordenadas xy , trocamos a variável independente y para x , usamos y como a variável dependente de ambas as funções e traçamos o gráfico das equações

$$y = x^3 + 1 \text{ e } y = \sqrt[3]{x-1}$$

Adiante nesta seção voltaremos a tratar de funções inversas, mas, para referência futura, apresentamos a seguinte reformulação das equações do cancelamento de (2) usando x como a variável independente de f e de f^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f \\ f(f^{-1}(x)) &= x \text{ em cada } x \text{ do domínio de } f^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

► **Exemplo 2** Confirme cada uma das seguintes afirmações:

- (a) A inversa de $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.
- (b) A inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

Solução (a)

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x \end{aligned}$$

Os resultados no Exemplo 2 devem fazer sentido intuitivo, uma vez que as operações de multiplicar por 2 e por $\frac{1}{2}$ em qualquer ordem cancelam uma o efeito da outra, da mesma forma que as operações de elevar ao cubo e extrair a raiz cúbica.

Em geral, se f tem uma inversa e $f(a) = b$, então o procedimento no Exemplo 3 mostra que $a = f^{-1}(b)$; ou seja, f^{-1} leva cada saída de f de volta para a entrada correspondente (Figura 0.4.2).

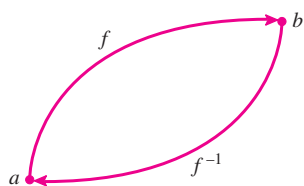


Figura 0.4.2 Se f leva a para b , então f^{-1} leva b de volta para a .

Uma maneira alternativa de obter uma fórmula para $f^{-1}(x)$ com x como variável independente é inverter os papéis de x e de y logo no início e, então, resolver a equação $x = f(y)$ para y como função de x .

Solução (b)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 3** Sabendo que a função f tem uma inversa e que $f(3) = 5$, encontre $f^{-1}(5)$.

Solução Aplicando f^{-1} a ambos os lados da equação $f(3) = 5$, obtemos

$$f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5)$$

e agora aplicamos a primeira das equações de (3) para concluir que $f^{-1}(5) = 3$. ◀

DOMÍNIO E IMAGEM DE FUNÇÕES INVERSAS

As equações em (3) implicam a seguinte relação entre os domínios e as imagens de f e de f^{-1} :

$$\begin{aligned} \text{domínio de } f^{-1} &= \text{imagem de } f \\ \text{imagem de } f^{-1} &= \text{domínio de } f \end{aligned} \quad (4)$$

Uma maneira de mostrar que esses dois conjuntos são iguais é mostrar que cada um está contido no outro. Assim, podemos estabelecer a primeira igualdade em (4) mostrando que o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f e que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1} . Isso pode ser feito da seguinte maneira: a primeira equação em (3) implica que f^{-1} está definido em $f(x)$ com quaisquer valores de x do domínio de f , e isso implica que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1} . Reciprocamente, se x está no domínio de f^{-1} , então a segunda equação em (3) implica que x está na imagem de f , por ser a imagem de $f^{-1}(x)$. Assim, o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f . Deixamos a prova da segunda equação de (4) como um exercício.

UM MÉTODO PARA ENCONTRAR FUNÇÕES INVERSAS

No começo desta seção, observamos que a resolução de $y = f(x) = x^3 + 1$ em x como uma função de y produz $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$. O teorema seguinte mostra que isso não aconteceu por acaso.

0.4.2 TEOREMA Se uma equação $y = f(x)$ pode ser resolvida em x como uma função de y , digamos $x = g(y)$, então f tem uma inversa, e essa inversa, é $g(y) = f^{-1}(y)$.

DEMONSTRAÇÃO Substituir $y = f(x)$ em $x = g(y)$ dá $x = g(f(x))$, que confirma a primeira equação da Definição 0.4.1, e substituir $x = g(y)$ em $y = f(x)$ dá $y = f(g(y))$, que confirma a segunda equação da Definição 0.4.1. ■

O Teorema 0.4.2 nos dá o seguinte procedimento para encontrar a inversa de uma função.

Um Procedimento para Encontrar a Inversa de uma Função f

Passo 1. Escreva a equação $y = f(x)$.

Passo 2. Se possível, resolva essa equação em x como função de y .

Passo 3. A equação resultante será $x = f^{-1}(y)$, que fornece uma fórmula para f^{-1} com variável independente y .

Passo 4. Se y for aceitável como variável independente da função inversa, problema resolvido; se quisermos ter x como variável independente, precisamos trocar x com y na equação $x = f^{-1}(y)$ para obter $y = f^{-1}(x)$.

► **Exemplo 4** Encontre uma fórmula para a inversa de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ com variável independente x e dê o domínio de f^{-1} .

Solução Seguindo o procedimento dado anteriormente, começamos escrevendo

$$y = \sqrt{3x - 2}$$

Em seguida, resolvemos essa equação em x como função de y :

$$\begin{aligned} y^2 &= 3x - 2 \\ x &= \frac{1}{3}(y^2 + 2) \end{aligned}$$

e obtemos

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y^2 + 2) \quad (5)$$

Como queremos que a variável independente seja x , trocamos x e y em (5) para obter a fórmula

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2) \quad (6)$$

Sabemos, a partir de (4), que o domínio de f^{-1} é a imagem de f . Em geral, isso não precisa ser igual ao domínio natural da fórmula para f^{-1} . De fato, nesse exemplo, o domínio natural de (6) é dado por $(-\infty, +\infty)$, enquanto a imagem de $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ é $[0, +\infty)$. Assim, se quisermos especificar o domínio de f^{-1} , devemos dá-lo explicitamente reescrevendo (6) como

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2), \quad x \geq 0 \quad \blacktriangleleft$$

■ EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO INVERSA

O procedimento que acabamos de dar para encontrar a inversa de uma função foi baseado na resolução da equação $y = f(x)$ em x como função de y . Esse procedimento pode falhar por duas razões: a função f pode não ter uma inversa, ou tem uma inversa, mas a equação $y = f(x)$ não pode ser resolvida explicitamente em x como função de y . Assim, é importante estabelecer condições que garantam a existência de uma inversa, mesmo se não for possível encontrá-la explicitamente.

Se uma função f tem uma inversa, então ela deve associar saídas distintas a entradas distintas. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ não pode ter uma inversa porque associa o mesmo valor a $x = 2$ e a $x = -2$, a saber,

$$f(2) = f(-2) = 4$$

Assim, se $f(x) = x^2$ tivesse uma inversa, então a equação $f(2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = 2$ e a equação $f(-2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = -2$. No entanto, isso é impossível, porque $f^{-1}(4)$ não pode ter dois valores diferentes. Outra maneira de ver que $f(x) = x^2$ não tem inversa é tentar encontrar uma inversa resolvendo a equação $y = x^2$ em x como função de y . Imediatamente nos deparamos com a equação $x = \pm\sqrt{y}$, que não expressa x como uma função bem definida de y .

Uma função que associa saídas distintas a entradas distintas é denominada **injetora**, ou **invertível**. Pelo que acabamos de discutir, se uma função tem uma inversa, então ela deve ser injetora. A recíproca também é verdadeira, e estabelecemos o seguinte teorema:

0.4.3 TEOREMA Uma função tem uma inversa se, e somente se, f é injetora.

Algebricamente, isso significa que uma função é injetora se, e somente se, $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$; geometricamente, uma função é injetora se, e somente se, o gráfico de $y = f(x)$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal (Figura 0.4.3). Essa última afirmação, junto com o Teorema 0.4.3, produz o seguinte teste geométrico para determinar se uma função tem uma inversa.

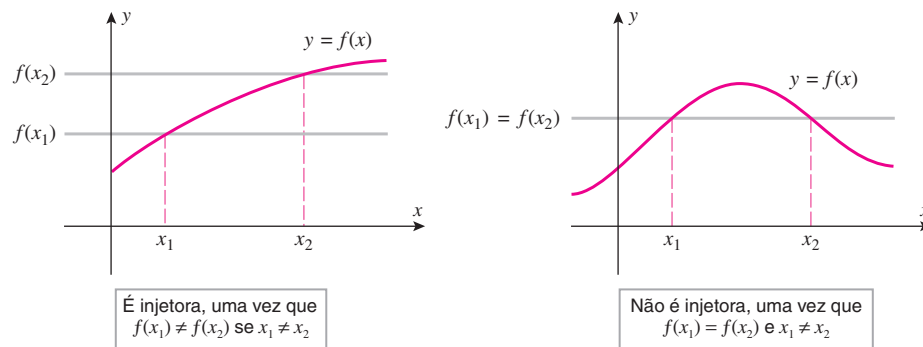


Figura 0.4.3

0.4.4 TEOREMA (O Teste da Reta Horizontal) Uma função tem uma inversa se, e somente se, seu gráfico é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal.

► **Exemplo 5** Use o teste da reta horizontal para mostrar que $f(x) = x^2$ não tem uma inversa, mas que $f(x) = x^3$ tem.

Solução A Figura 0.4.4 mostra uma reta horizontal que corta o gráfico de $y = x^2$ mais de uma vez, de modo que $f(x) = x^2$ não é invertível. A Figura 0.4.5 mostra que o gráfico de $y = x^3$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal, de modo que $f(x) = x^3$ é invertível. [Lembre, do Exemplo 2, que a inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.] ◀

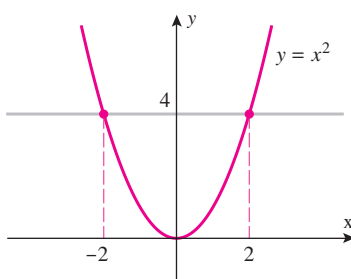


Figura 0.4.4

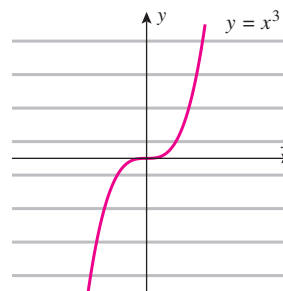


Figura 0.4.5

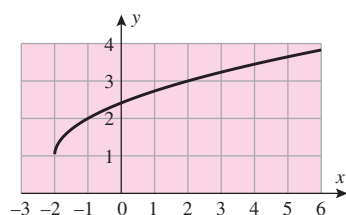


Figura 0.4.6

A função $f(x) = x^3$ na Figura 0.4.5 é um exemplo de uma função crescente. Dê um exemplo de uma função decrescente e calcule sua inversa.

► **Exemplo 6** Explique por que a função cujo gráfico está na Figura 0.4.6 tem uma inversa e obtenha $f^{-1}(3)$.

Solução A função f tem uma inversa uma vez que seu gráfico passa pelo teste da reta horizontal. Para calcular $f^{-1}(3)$, consideramos $f^{-1}(3)$ como aquele número x com o qual $f(x) = 3$. A partir do gráfico, vemos que $f(2) = 3$; logo, $f^{-1}(3) = 2$. ◀

■ FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES SÃO INVERTÍVEIS

Uma função cujo gráfico está sempre crescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada **função crescente**, e uma função cujo gráfico está sempre decrescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada **função decrescente**. Se x_1 e x_2 são pontos do domínio de f , então f é crescente se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

e f é decrescente se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

(Figura 0.4.7). É geometricamente evidente que funções crescentes e decrescentes passam no teste da reta horizontal e, portanto, são invertíveis.

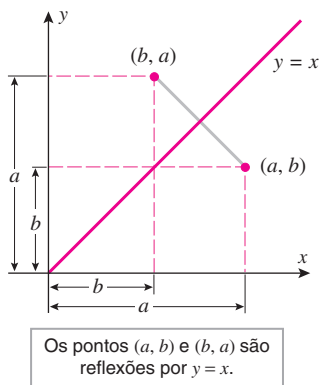


Figura 0.4.8

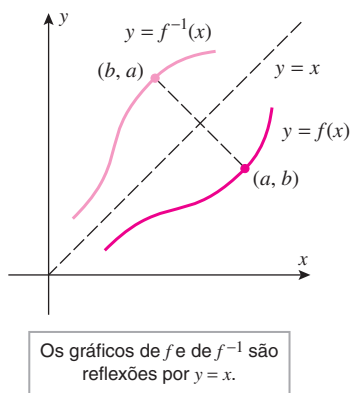
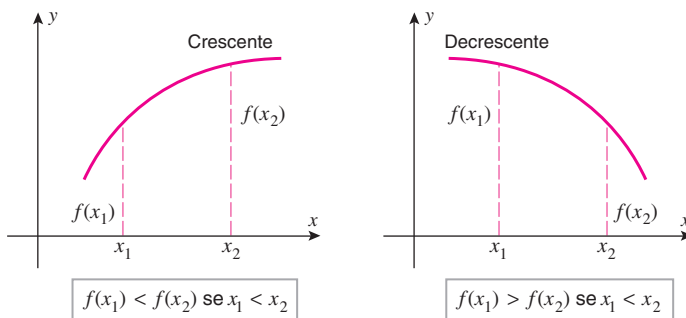


Figura 0.4.9

Figura 0.4.7



■ GRÁFICO DAS FUNÇÕES INVERSAS

Nosso próximo objetivo é explorar a relação entre os gráficos de f e f^{-1} . Com esse propósito, será desejável usar x como a variável independente para ambas as funções, para podermos comparar os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$.

Se (a, b) for um ponto no gráfico $y = f(x)$, então $b = f(a)$. Isso é equivalente à afirmativa de que $a = f^{-1}(b)$, a qual significa que (b, a) é um ponto no gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Em resumo, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f produz um ponto no gráfico de f^{-1} . Analogamente, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f^{-1} produz um ponto no gráfico de f (verifique). Contudo, o efeito geométrico de inverter as coordenadas de um ponto é refletir aquele ponto pela reta $y = x$ (Figura 0.4.8), portanto os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação a essa reta (Figura 0.4.9). Em resumo, temos o seguinte resultado.

0.4.5 TEOREMA Se f tiver uma inversa, então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$; isto é, cada um é a imagem espelhada do outro em relação àquela reta.

► **Exemplo 7** A Figura 0.4.10 mostra os gráficos das funções inversas discutidas nos Exemplos 2 e 4. ◀

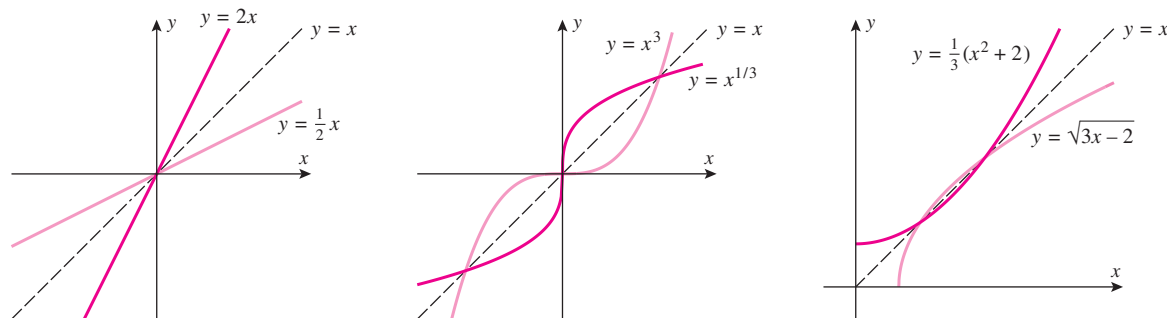


Figura 0.4.10

■ RESTRINGINDO DOMÍNIOS PARA A INVERTIBILIDADE

Se uma função g for obtida a partir de uma função f pela imposição de restrições sobre o domínio de f , então diremos que g é uma **restrição** de f . Assim, por exemplo, a função

$$g(x) = x^3, \quad x \geq 0$$

é uma restrição da função $f(x) = x^3$. Mais precisamente, dizemos que g é a restrição de x^3 ao intervalo $[0, +\infty)$.

Às vezes é possível criar uma função invertível a partir de uma função que não é invertível pela restrição apropriada do domínio. Por exemplo, já vimos que $f(x) = x^2$ não é invertível. Contudo, considere as funções restritas

$$f_1(x) = x^2, \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) = x^2, \quad x \leq 0$$

A união dos gráficos dessas duas funções é o gráfico completo de $f(x) = x^2$ (Figura 0.4.11). Cada uma dessas funções restritas é injetora (portanto invertível), pois seu gráfico passa no teste da linha horizontal. Como ilustra a Figura 0.4.12, suas inversas são

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

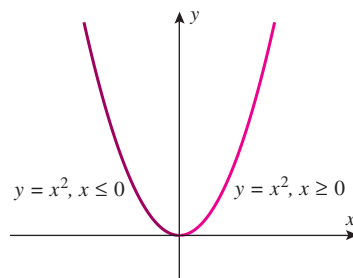


Figura 0.4.11

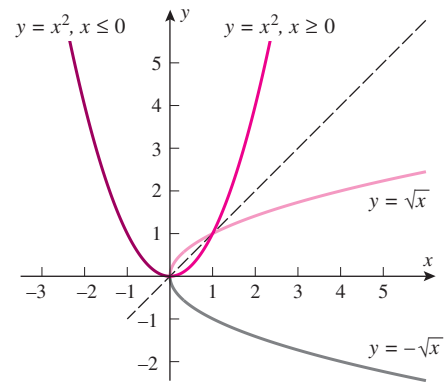


Figura 0.4.12

■ FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é obter um ângulo x a partir de um valor conhecido de $\sin x$, de $\cos x$ ou de alguma outra função trigonométrica. Lembre-se de que problemas desse tipo envolvem o cálculo de “funções arco”, tais como $\arcsin x$, $\arccos x$ e assim por diante. Vamos terminar esta seção estudando essas funções arco do ponto de vista de funções inversas gerais.

As seis funções trigonométricas básicas não têm inversas pois seus gráficos se repetem periodicamente e, portanto, não passam no teste da reta horizontal. Para evitar esse problema, restringimos os domínios das funções trigonométricas para obter funções injetoras e depois definimos as “funções trigonométricas inversas” como as inversas dessas funções restritas. A parte superior da Figura 0.4.13 mostra geometricamente como impor essas restrições a $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\sec x$, e a parte inferior mostra o gráfico correspondente das funções inversas

$$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arcsec} x$$

(que também poderiam ser denotadas por $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, prática que não será adotada aqui). As inversas de $\cotg x$ e de $\operatorname{cosec} x$ são de menor importância e serão consideradas nos exercícios.

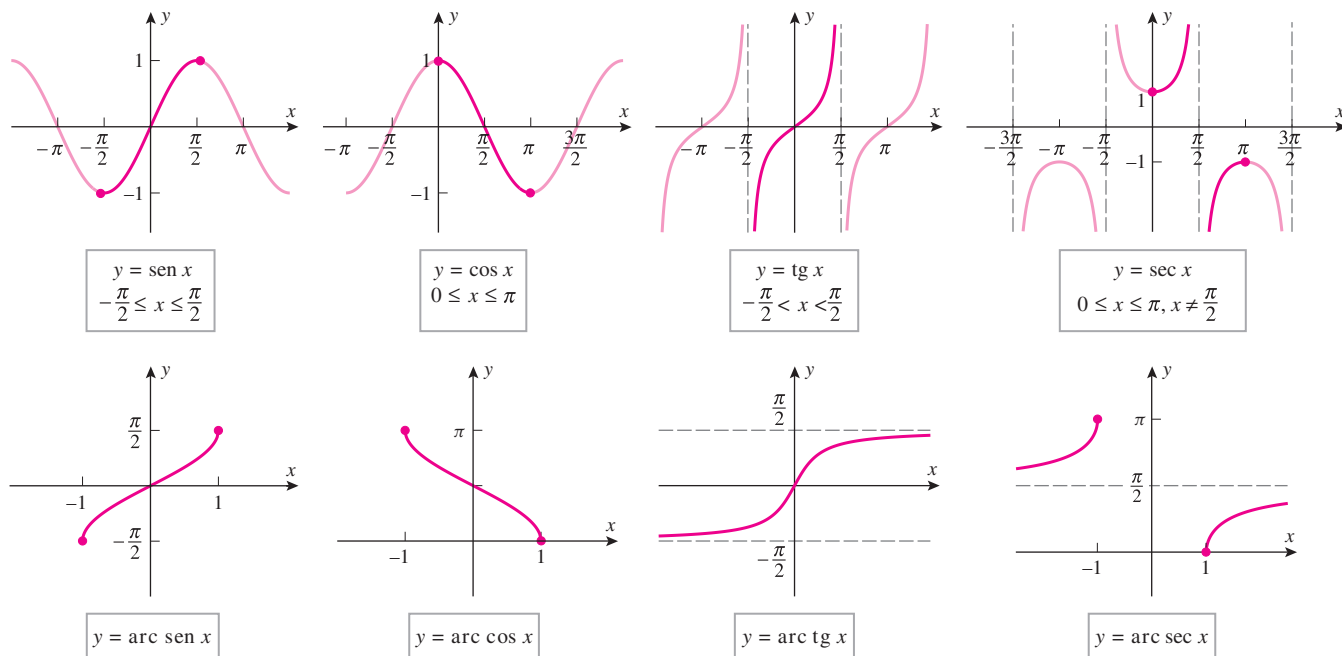


Figura 0.4.13

Se o leitor encontrar dificuldades para visualizar a correspondência entre as partes superior e inferior da Figura 0.4.13, deve lembrar que uma reflexão pela reta $y = x$ transforma retas verticais em retas horizontais e vice-versa, convertendo cortes com o eixo x em cortes com o eixo y e vice-versa.

As definições formais seguintes resumem a discussão precedente.

0.4.6 DEFINIÇÃO A função *arco seno*, denotada por arc sen , é definida como sendo a inversa da função seno restrita

$$\text{sen } x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

0.4.7 DEFINIÇÃO A função *arco cosseno*, denotada por arc cos , é definida como sendo a inversa da função cosseno restrita

$$\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

0.4.8 DEFINIÇÃO A função *arco tangente*, denotada por arc tg , é definida como sendo a inversa da função tangente restrita

$$\text{tg } x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

0.4.9 DEFINIÇÃO* A função *arco secante*, denotada por arc sec , é definida como sendo a inversa da função secante restrita

$$\sec x, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ com } x \neq \pi/2$$

* Não há um acordo universal sobre a definição de $\text{arc sec } x$, e alguns matemáticos preferem restringir o domínio de $\sec x$ de tal forma que $0 \leq x < \pi/2$ ou $\pi \leq x < 3\pi/2$, definição usada em algumas edições anteriores deste livro. Cada definição tem vantagens e desvantagens, mas mudamos para a definição corrente por estar de acordo com a convenção usada pelos programas *Mathematica*, *Maple* e *Sage*.

A Tabela 0.4.1 resume as propriedades básicas das funções trigonométricas inversas que vimos. O leitor deve confirmar que os domínios e imagens listados nessa tabela são consistentes com os gráficos mostrados na Figura 0.4.13.

Tabela 0.4.1
PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	RELAÇÕES BÁSICAS
arc sen	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\text{arc sen}(\text{sen } x) = x$ se $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ $\text{sen}(\text{arc sen } x) = x$ se $-1 \leq x \leq 1$
arc cos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\text{arc cos}(\text{cos } x) = x$ se $0 \leq x \leq \pi$ $\text{cos}(\text{arc cos } x) = x$ se $-1 \leq x \leq 1$
arc tg	$[-\infty, +\infty]$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\text{arc tg}(\text{tg } x) = x$ se $-\pi/2 < x < \pi/2$ $\text{tg}(\text{arc tg } x) = x$ se $-\infty < x < +\infty$
arc sec	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$\text{arc sec}(\text{sec } x) = x$ se $0 \leq x \leq \pi, x \neq \pi/2$ $\text{sec}(\text{arc sec } x) = x$ se $ x \geq 1$

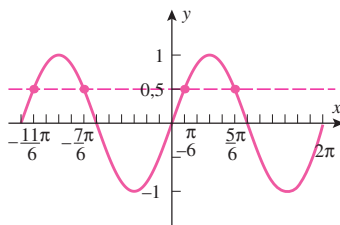


Figura 0.4.14

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use o manual de seu recurso computacional para determinar como calcular inversas de senos, cossenos e tangentes e, então, confirme a Equação (9) numericamente, mostrando que

$$\text{arc sen } 0,5 \approx 0,523598775598... \approx \pi/6$$

Se $x = \text{arc cos } y$ for visto como um ângulo medido em radianos cujo cosseno é y , em qual quadrante pode estar x ? Responda à mesma questão para

$$x = \text{arc tg } y \quad \text{e} \quad x = \text{arc sec } y.$$

CALCULANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é encontrar um ângulo cujo seno seja conhecido. Por exemplo, podemos querer encontrar um ângulo x medido em radianos, tal que

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \quad (7)$$

e, mais geralmente, para um dado valor de y no intervalo $-1 \leq y \leq 1$ podemos querer resolver a equação

$$\text{sen } x = y \quad (8)$$

Como $\text{sen } x$ repete-se periodicamente, tais equações têm uma infinidade de soluções em x ; entretanto, se resolvermos essa equação como

$$x = \text{arc sen } y$$

então isolamos a solução específica que está no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, uma vez que essa é a variação da inversa do seno. Por exemplo, a Figura 0.4.14 mostra quatro soluções da Equação (7), a saber, $-11\pi/6$, $-7\pi/6$, $\pi/6$ e $5\pi/6$. Uma delas, $\pi/6$, é a solução no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, logo

$$\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/6 \quad (9)$$

Em geral, se considerarmos $x = \text{arc sen } y$ como um ângulo medido em radianos cujo seno é y , então a restrição $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ impõe a exigência geométrica de que o ângulo x em posição padrão esteja no primeiro ou no quarto quadrantes, ou em um dos eixos adjacentes a esses quadrantes.

► **Exemplo 8** Encontre os valores exatos de

$$(a) \text{ arc sen}(1/\sqrt{2}) \quad (b) \text{ arc sen}(-1)$$

por inspeção e confirme numericamente seus resultados usando um recurso computacional.

Solução (a) Como $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) > 0$, podemos ver $x = \text{arc sen}(1/\sqrt{2})$ como aquele ângulo no primeiro quadrante tal que $\text{sen } x = 1/\sqrt{2}$. Assim, $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen}(1/\sqrt{2}) \approx 0,785 \approx \pi/4$.

Solução (b) Como $\text{arc sen}(-1) < 0$, podemos ver $x = \text{arc sen}(-1)$ como aquele ângulo no quarto quadrante (ou um eixo adjacente) tal que $\text{sen } x = -1$. Assim, $\text{arc sen}(-1) = -\pi/2$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen}(-1) \approx -1,57 \approx -\pi/2$. ◀

**DOMÍNIO DA
TECNOLOGIA**

A maioria das calculadoras não tem um método direto para calcular a inversa da secante. Em tal situação, a identidade

$$\operatorname{arc} \sec x = \operatorname{arc} \cos (1/x) \quad (10)$$

é útil (Exercício 50). Use essa fórmula para mostrar que

$$\operatorname{arc} \sec (2,25) \approx 1,11 \quad \text{e} \quad \operatorname{arc} \sec (-2,25) \approx 2,03$$

Se você tiver um recurso computacional (tal como um CAS) que possa encontrar $\operatorname{arc} \sec x$ diretamente, use-o para conferir esses valores.

IDENTIDADES PARA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Se interpretamos $\operatorname{arc} \sen x$ como um ângulo medido em radianos cujo seno é x , e se esse ângulo for *não negativo*, então podemos representar $\operatorname{arc} \sen x$ geometricamente como um ângulo em um triângulo retângulo no qual a hipotenusa tem comprimento 1 e o lado oposto ao ângulo de $\operatorname{arc} \sen x$, comprimento x (Figura 0.4.15a). Além disso, o ângulo sem indicação na Figura 0.4.15a é igual a $\operatorname{arc} \cos x$, pois o cosseno daquele ângulo é x e o lado sem indicação daquela figura tem comprimento $\sqrt{1-x^2}$ pelo Teorema de Pitágoras (Figura 0.4.15b). Esse triângulo motiva várias identidades úteis, envolvendo funções trigonométricas inversas que valem com $-1 \leq x \leq 1$. Por exemplo:

$$\operatorname{arc} \sen x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

$$\cos (\operatorname{arc} \sen x) = \sqrt{1-x^2} \quad (12)$$

$$\sen (\operatorname{arc} \cos x) = \sqrt{1-x^2} \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \sen x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (14)$$

Não se ganha nada memorizando essas identidades; o importante é compreender o *método* que foi usado para obtê-las.

Analogamente, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ e $\operatorname{arc} \sec x$ podem ser representadas como ângulos dos triângulos retângulos mostrados nas Figuras 0.4.15c e 0.4.15d (verifique). Esses triângulos revelam mais identidades úteis, por exemplo:

$$\sec (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \sqrt{1+x^2} \quad (15)$$

$$\sen (\operatorname{arc} \sec x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad (x \geq 1) \quad (16)$$

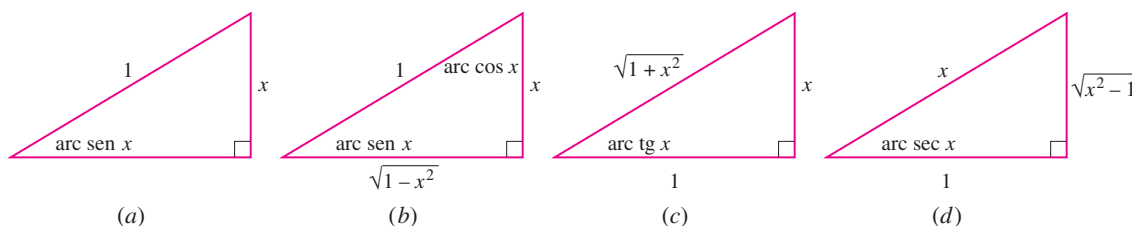


Figura 0.4.15

OBSERVAÇÃO

A técnica do triângulo nem sempre produz a forma mais geral de uma identidade. Por exemplo, no Exercício 61 pedimos para o leitor deduzir a seguinte extensão da Fórmula (16) que é válida tanto para $x \leq -1$ quanto para $x \geq 1$:

$$\sen (\operatorname{arc} \sec x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \quad (|x| \geq 1) \quad (17)$$

A partir da Figura 0.4.13, observe que as inversas do seno e da tangente são funções ímpares; isto é,

$$\operatorname{arc} \sen (-x) = -\operatorname{arc} \sen x \quad \text{e} \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad (18-19)$$

► **Exemplo 9** A Figura 0.4.16 mostra um gráfico gerado por computador da função $y = \arcsen(\sen x)$. Seria possível pensar que esse gráfico deva ser a reta $y = x$, uma vez que $\arcsen(\sen x) = x$. Por que isso não acontece?

Solução A relação $\arcsen(\sen x) = x$ é válida no intervalo $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; logo, podemos dizer, com certeza, que os gráficos de $y = \arcsen(\sen x)$ e $y = x$ coincidem nesse intervalo (o que é confirmado pela Figura 0.4.16). Contudo, fora desse intervalo, a relação $\arcsen(\sen x) = x$ não precisa ser válida. Por exemplo, se x estiver no intervalo $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, então a quantidade $x - \pi$ estará no intervalo $-\pi/2 \leq x - \pi \leq \pi/2$ e, portanto,

$$\arcsen[\sen(x - \pi)] = x - \pi$$

Assim, usando a identidade $\sen(x - \pi) = -\sen x$ e o fato de que $\arcsen$ é uma função ímpar, podemos expressar $\arcsen(\sen x)$ como

$$\arcsen(\sen x) = \arcsen[-\sen(x - \pi)] = -\arcsen[\sen(x - \pi)] = -(x - \pi)$$

Isso mostra que, no intervalo $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, o gráfico de $y = \arcsen(\sen x)$ coincide com a reta $y = -(x - \pi)$, que tem inclinação -1 e um corte no eixo x em $x = \pi$, o que está de acordo com a Figura 0.4.16. ◀

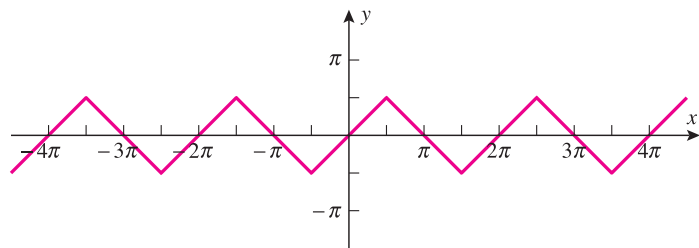


Figura 0.4.16

✓ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 0.4 (Ver página 52 para respostas.)

- Em cada parte, determine se a função f é injetora.
 - $f(t)$ é o número de pessoas na fila de um cinema no instante de tempo t .
 - $f(x)$ é a temperatura máxima medida (arredondada até o °C mais próximo) em uma cidade no x -ésimo dia do ano.
 - $f(v)$ é o peso de v centímetros cúbicos de chumbo.
- Um estudante digita um número em uma calculadora, toma o dobro, soma 8 ao resultado, divide a soma por 2, subtrai 3 do quociente e, então, toma o cubo da diferença. Se o número resultante for x , então o número original digitado pelo estudante foi _____.
- Se $(3, -2)$ é um ponto no gráfico de uma função f ímpar invertível, então _____ e _____ são pontos no gráfico de f^{-1} .
- Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
 - $\arcsen(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arctg(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arcsen(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arccos(\frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arcsec(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
 - $\arcsen(\sen \pi/7) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arcsen(\sen 5\pi/7) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arctg(\tg 13\pi/6) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\arccos(\cos 12\pi/7) = \underline{\hspace{2cm}}$

EXERCÍCIOS 0.4 Recurso Gráfico

- Em (a)–(d), determine se f e g são funções inversas.
 - $f(x) = 4x$, $g(x) = \frac{1}{4}x$
 - $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x - 1$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $g(x) = x^3 + 2$
 - $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$
-  Verifique suas respostas para o Exercício 1 com um recurso gráfico computacional, determinando se os gráficos de f e g são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.
- Em cada parte, use o teste da reta horizontal para determinar se a função f é injetora.

- (a) $f(x) = 3x + 2$ (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$
 (c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x^3$
 (e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (f) $f(x) = \sin x$

4. Em cada parte, gere o gráfico da função f com um recurso gráfico computacional e determine se f é injetora.

- (a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Em cada parte, determine se a função f definida pela tabela é injetora.

(a)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

(b)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	-7	6	-3	1	4

6. A face de um relógio quebrado caiu inteira no plano xy com o centro do relógio na origem e as 3 horas na direção do eixo x positivo. Quando o relógio quebrou, a ponta do ponteiro das horas parou no gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função que satisfaz $f(0) = 0$.

- (a) Existem algumas horas do dia que não podem ocorrer em uma tal configuração? Explique.
 (b) Como é afetada sua resposta a (a) se f deve ser uma função invertível?
 (c) Como são afetadas suas respostas a (a) e (b) se foi a ponta do ponteiro dos minutos que parou no gráfico de f ?

7. (a) A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f sobre seu domínio $-8 \leq x \leq 8$. Explique por que f tem uma inversa e use o gráfico para encontrar $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-1)$ e $f^{-1}(0)$.

- (b) Encontre o domínio e a imagem de f^{-1} .
 (c) Esboce o gráfico de f^{-1} .

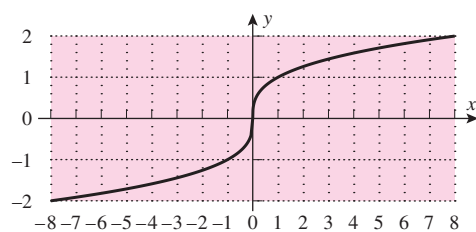


Figura Ex-7

8. (a) Explique por que a função f , cujo gráfico está na figura abaixo, não tem inversa em seu domínio $-3 \leq x \leq 4$.
 (b) Subdivida o domínio em três intervalos adjacentes sobre cada um dos quais a função f tem uma inversa.

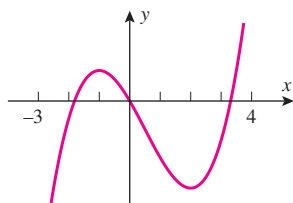


Figura Ex-8

9-16 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$. ■

9. $f(x) = 7x - 6$ 10. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
 11. $f(x) = 3x^3 - 5$ 12. $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$
 13. $f(x) = 3/x^2, x < 0$ 14. $f(x) = 5/(x^2 + 1), x \geq 0$
 15. $f(x) = \begin{cases} 5/2 - x, & x < 2 \\ 1/x, & x \geq 2 \end{cases}$
 16. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

17-20 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$ e dê o domínio da função f^{-1} . ■

17. $f(x) = (x+2)^4, x \geq 0$
 18. $f(x) = \sqrt{x+3}$ 19. $f(x) = -\sqrt{3-2x}$
 20. $f(x) = x - 5x^2, x \geq 1$
 21. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Encontre f^{-1} se o domínio de f for restrito a
 (a) $x \geq -b/(2a)$ (b) $x \leq -b/(2a)$

ENFOCANDO CONCEITOS

22. A fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$, com $C \geq -273,15$, expressa a temperatura em Fahrenheit F como uma função da temperatura em Celsius C .

- (a) Encontre uma fórmula para a função inversa.
 (b) Descreva em palavras o significado da função inversa.
 (c) Encontre o domínio e a imagem da função inversa.

23. (a) Um metro é aproximadamente $6,214 \times 10^{-4}$ milhas. Encontre uma fórmula $y = f(x)$ que expresse o comprimento x em metros como uma função de mesmo comprimento y em milhas.

- (b) Encontre uma fórmula para a função inversa de f .
 (c) Em termos práticos, o que significa a fórmula $x = f^{-1}(y)$?

24. Sejam $f(x) = x^2, x > 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Mostre que $f(g(x)) = x, x > 1$ e $g(f(x)) = x, x > 1$.
 (b) Mostre que f e g não são inversas uma da outra provando que os gráficos dessas funções não são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.
 (c) As partes (a) e (b) se contradizem? Explique.

25. (a) Mostre que $f(x) = (3-x)/(1-x)$ é a sua própria inversa.

- (b) O que o resultado de (a) diz sobre o gráfico de f ?

26. Esboce o gráfico de uma função que é injetora em $(-\infty, +\infty)$, embora não crescente em $(-\infty, +\infty)$ e não decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

27. Seja $f(x) = 2x^3 + 5x + 3$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 1$.

28. Seja $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 2$.

29. Prove que, se $a^2 + bc \neq 0$, então o gráfico de

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$$

é simétrico em relação à reta $y = x$.

30. (a) Prove que, se f e g forem injetoras, então a composição $f \circ g$ também o é.
(b) Prove que, se f e g forem injetoras, então

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

31-34 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

31. Se f for uma função invertível tal que $f(2) = 2$, então $f^{-1}(2) = \frac{1}{2}$.
32. Se f e g forem funções inversas, então f e g têm o mesmo domínio.
33. Uma função injetora é invertível.
34. A imagem da função arco tangente é o intervalo $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.
35. Dado que $\theta = \arctg(\frac{4}{3})$, encontre os valores exatos de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\cotg \theta$, $\sec \theta$ e $\operatorname{cosec} \theta$.
36. Sabendo que $\theta = \operatorname{arcsec} 2,6$, encontre o valor exato de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tg \theta$, $\cotg \theta$ e $\operatorname{cosec} \theta$.
37. Com quais valores de x é verdade que:
(a) $\arccos(\cos x) = x$ (b) $\cos(\arccos x) = x$
(c) $\arctg(\tg x) = x$ (d) $\tg(\arctg x) = x$

38-39 Encontre o valor exato da quantidade dada. ■

38. $\sec[\arcsin(-\frac{3}{4})]$ 39. $\sin[2 \arccos(\frac{3}{5})]$

40-41 Complete as identidades usando o método do triângulo (Figura 0.4.15). ■

40. (a) $\sin(\arccos x) = ?$ (b) $\tg(\arccos x) = ?$
(c) $\operatorname{cosec}(\arctg x) = ?$ (d) $\sin(\arctg x) = ?$
41. (a) $\cos(\arctg x) = ?$ (b) $\tg(\arccos x) = ?$
(c) $\sin(\operatorname{arcsec} x) = ?$ (d) $\cotg(\operatorname{arcsec} x) = ?$

42. (a) Use um recurso gráfico computacional ajustado para medir radianos para fazer tabelas dos valores de $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ com $x = -1; -0,8; -0,6; \dots; 0; 0,2; \dots; 1$. Arredonde suas respostas para duas casas decimais.
(b) Plote os pontos obtidos em (a) e use-os para esboçar os gráficos de $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$. Confirme que seus esboços estão de acordo com aqueles da Figura 0.4.13
(c) Use seu recurso computacional para fazer o gráfico $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$; confirme que os gráficos estão de acordo com aqueles da Figura 0.4.13.

43. Em cada parte, esboce o gráfico e verifique seu trabalho com um recurso gráfico computacional.
(a) $y = \arcsin 2x$ (b) $y = \arctg \frac{1}{2}x$

44. A lei dos cossenos afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

onde a , b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo e θ é o ângulo formado pelos lados a e b . Obtenha θ , até o grau mais próximo, para o triângulo com $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

45-46 Use um recurso computacional para aproximar a solução da equação. Quando forem usados radianos, expresse sua resposta com quatro casas decimais; quando forem usados graus, expresse-a até o décimo de grau mais próximo. [Nota: Em cada parte, a solução não está na imagem da função trigonométrica inversa pertinente.] ■

45. (a) $\sin x = 0,37$, $\pi/2 < x < \pi$
(b) $\sin \theta = -0,61$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$
46. (a) $\cos x = -0,85$, $\pi < x < 3\pi/2$
(b) $\cos \theta = 0,23$, $-90^\circ < \theta < 0^\circ$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Use um recurso computacional para calcular o valor de $\arcsin(\arcsin 0,25)$ e $\arcsin(\arcsin 0,9)$ e explique o que pode estar acontecendo no segundo cálculo.
(b) Com quais valores de x no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ seu recurso computacional produz um valor real para a função $\arcsin(\arcsin x)$?
48. Um jogador de futebol chuta uma bola com uma velocidade inicial de 14 m/s em um ângulo θ com o plano horizontal (ver figura abaixo). A bola cai no chão a uma distância de 18 m depois do chute. Se a resistência do ar for desprezada, então a bola terá uma trajetória parabólica e o alcance horizontal R será dado por

$$R = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$$

onde v é a velocidade inicial da bola e g é a aceleração da gravidade. Usando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, aproxime dois valores de θ , até o grau mais próximo, segundo os quais a bola poderia ter sido chutada. Qual ângulo resultaria em um tempo menor de permanência no ar? Por quê?

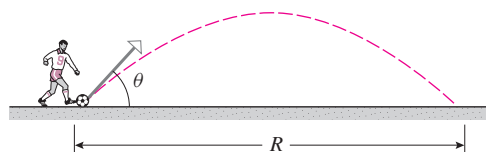


Figura Ex-48

49-50 A função $\operatorname{arc} \cotg x$ é definida como sendo a inversa da função cotangente restrita

$$\cotg x, \quad 0 < x < \pi$$

e a função $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$ é definida como sendo a inversa da função cosecante restrita

$$\operatorname{cosec} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad x \neq 0$$

Use essas definições em todos os exercícios subsequentes que envolverem essas funções. ■

49. (a) Esboce os gráficos de $\operatorname{arc} \cotg x$ e $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.
(b) Obtenha o domínio e a imagem de $\operatorname{arc} \cotg x$ e de $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.