Capítulo 1

Probabilidade Básica

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Todos estão familiarizados com a importância dos experimentos na ciência e na engenharia. A experimentação é útil porque podemos presumir que, se executarmos certos experimentos sob condições quase idênticas, chegaremos a resultados que são essencialmente os mesmos. Nestas circunstâncias, podemos controlar o valor das variáveis que afetam o resultado do experimento.

Entretanto, em alguns experimentos, não somos capazes de assegurar ou controlar o valor de certas variáveis assim os resultados irão variar em desempenho de um experimento para o próximo, embora a maioria das condições sejam as mesmas. Estes experimentos são descritos como *aleatórios*. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 1.1 Se lançamos uma moeda, o resultado do experimento será "coroa", representado por T (ou 0) ou "cara", representado por H (ou 1), isto é, um dos elementos do conjunto $\{H, T\}$ (ou $\{0, 1\}$).

Exemplo 1.2 Se lançamos um dado, o resultado do experimento será um dos números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo 1.3 Se lançamos uma moeda duas vezes, existem quatro resultados possíveis, indicados por $\{HH, HT, TH, TT\}$, isto é, ambos cara, cara primeiro, coroa em segundo, etc.

Exemplo 1.4 Se estamos fazendo parafusos com uma máquina, o resultado do experimento é que alguns poderão ser defeituosos. Portanto, quando um parafuso é feito ele será um membro do conjunto (defeituoso, não defeituoso).

Exemplo 1.5 Se um experimento consiste de mensurar a "duração" de lâmpadas elétricas por uma empresa, então o resultado do experimento é a duração t em horas que está em um intervalo – digamos, $0 \leq t \leq 4000$, onde supomos que nenhuma lâmpada dure mais do que 4000 horas.

ESPAÇOS AMOSTRAIS

Um conjunto S de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de um *espaço amostral* e cada resultado é denominado um *ponto amostral*. Geralmente, haverá mais do que um espaço amostral que poderá descrever os resultados de um experimento, mas normalmente somente um fornecerá a informação mais importante.

Exemplo 1.6 Se lançamos um dado, um espaço amostral ou um conjunto de todos os resultados possíveis é dado por $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ enquanto que um outro é $\{$par, ímpar$\}$. Está claro, entretanto, que o último não é adequado para determinar, por exemplo, se um resultado é divisível por 3.

Geralmente, é útil exibir um espaço amostral graficamente. Em tais casos, é conveniente usar números no lugar de letras sempre que possível.

Exemplo 1.7 Se lançamos uma moeda duas vezes e usamos 0 para representar coroa e 1 para representar cara, o espaço amostral (veja o Exemplo 1.3) pode ser exibido por pontos como na Fig. 1-1, por exemplo, (0, 1) representa coroa no primeiro lançamento e cara no segundo lançamento, isto é, *TH*.

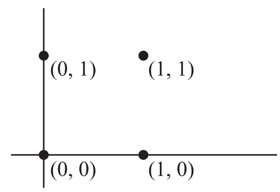


Figura 1-1

Se um espaço amostral tiver um número finito de pontos, como no Exemplo 1.7, ele é chamado de um *espaço amostral finito*. Se ele tiver tantos pontos quantos números naturais existentes 1, 2, 3,..., ele é chamado de *espaço amostral finito contável*. Se ele tem tantos pontos quantos tem em um intervalo do eixo x, como $0 \leq x \leq 1$, ele é chamado de *espaço amostral infinito não contável*. Um espaço amostral que é finito ou infinito contável é geralmente chamado de *espaço amostral discreto*, enquanto que um que é infinito não contável é chamado de *espaço amostral não discreto*.

EVENTOS

Um *evento* é um subconjunto A do espaço amostral S, isto é, um conjunto de resultados possíveis. Se o resultado de um experimento for um elemento de A, dizemos que *ocorreu* A. Um evento que consiste de um único ponto de S é geralmente chamado de um *evento único* ou um *evento elementar*.

Exemplo 1.8 Se lançamos uma moeda duas vezes, o evento apenas uma cara é o subconjunto do espaço amostral que consiste dos pontos (0, 1) e (1, 0), como está indicado na Fig. 1-2.

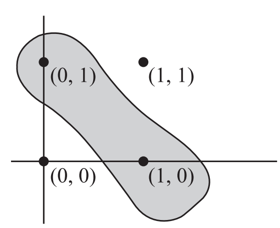


Figura 1-2

Como eventos especiais, temos o próprio S, que é o evento *certo* ou *garantido*, visto que um elemento de S deve ocorrer, e o conjunto vazio $\varnothing$, que é denominado *evento impossível* porque um elemento de $\varnothing$ não pode ocorrer.

Usando as operações de conjunto com os eventos de S, podemos obter outros eventos em S. Por exemplo, se A e B são eventos, então:

1. $A \cup B$ é o evento "ou A ou B ou ambos". $A \cup B$ é chamado de *união* de A e B.
2. $A \cap B$ é o evento "ambos A e B". $A \cap B$ é chamado de *intersecção* de A e B.
3. A' é o evento "não A". A' é chamado de o *complemento* de A.
4. $A - B = A \cap B'$ é o evento "A, mas não B". Em particular, $A' = S - A$.

Se os conjuntos correspondentes aos eventos A e B são separados, isto é, $A \cap B = \varnothing$, geralmente dizemos que os eventos são *mutuamente exclusivos*. Isto significa que eles não podem ocorrer simultaneamente. Dizemos que uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é mutuamente exclusiva se cada par na coleção é mutuamente exclusivo.

Exemplo 1.9 Com referência ao lançamento de uma moeda duas vezes, considere A o evento de "pelo menos uma cara ocorrer" e B o evento de "o segundo lançamento resulta em uma coroa". Então $A = \{HT, TH, HH\}$, $B = \{HT, TT\}$ e assim temos:

$$A \cup B = \{HT, TH, HH, TT\} = S \qquad A \cap B = \{HT\}$$
$$A' = \{TT\} \qquad A - B = \{TH, HH\}$$

O CONCEITO DE PROBABILIDADE

Em qualquer experimento aleatório existe sempre uma incerteza se um evento em particular irá ou não ocorrer. Como uma medida da *chance* ou *probabilidade*, com a qual podemos esperar que o evento ocorra, é conveniente designar um número entre 0 e 1. Se estamos certos ou seguros de que o evento irá ocorrer, dizemos que a sua probabilidade é de 100% ou 1, mas se estamos certos de que o evento não irá ocorrer, dizemos que a sua probabilidade é zero. Se, por exemplo, a probabilidade é de 1/4, diríamos que existem 25% de chance que ele irá ocorrer e 75% de chance de que não ocorra. De forma equivalente, podemos dizer que as *chances* contra a sua ocorrência são de 75% a 25% ou 3 para 1.

Existem dois procedimentos importantes pelos quais podemos estimar a probabilidade de um evento.

1. **ABORDAGEM CLÁSSICA.** Se um evento ocorre de h formas diferentes em um total de n formas possíveis, todas sendo igualmente prováveis, então a probabilidade do evento é h/n.

Exemplo 1.10 Suponha que queremos saber a probabilidade de que irá sair cara em um único lançamento de uma moeda. Visto que existem duas formas igualmente prováveis que uma moeda possa ocorrer – a saber, cara e coroa (presumindo que ela não role ou fique em pé), e, destas duas formas, cara pode aparecer somente de uma, concluímos que a probabilidade requerida é ½. Para chegar a isso, presumimos que aquela moeda é *honesta*, isto é, não tende para nenhum dos lados.

2. **ABORDAGEM FREQUENCIAL.** Se após n repetições de um experimento, onde n é muito grande, um evento ocorre h vezes, então a probabilidade do evento é h/n. Este resultado é também denominado *probabilidade empírica* do evento.

Exemplo 1.11 Se lançamos uma moeda 1000 vezes e verificamos que cara apareceu 532 vezes então, estimamos que a probabilidade de sair cara é $532/1000 = 0{,}532$.

Tanto a abordagem clássica quanto a frequencial tem sérios defeitos, a primeira porque a expressão “igualmente provável” é vaga, e a segunda porque um “grande número” é igualmente vago. Assim, em virtude destas dificuldades, os matemáticos foram levados a criar uma *abordagem axiomática* para a probabilidade.

OS AXIOMAS DE PROBABILIDADE

Suponha que temos um espaço amostral S. Se S é discreto, todos os subconjuntos são eventos e vice-versa, mas se S não é discreto, então somente subconjuntos especiais (denominados *mensuráveis*) são eventos. Para cada evento, A na classe C dos eventos, associamos um número real $P(A)$. Então P é denominada uma *função de probabilidade* e $P(A)$ de *probabilidade* do evento A, se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

Axioma 1 Para cada evento A na classe C,

$$P(A) \geq 0 \tag{1}$$

Axioma 2 Para o evento certo ou garantido de S na classe C,

$$P(S) = 1 \tag{2}$$

Axioma 3 Para qualquer número de eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots$, na classe C,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \tag{3}$$

Em particular, para dois eventos mutuamente exclusivos A_1, A_2,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \tag{4}$$

ALGUNS TEOREMAS IMPORTANTES DA PROBABILIDADE

A partir destes axiomas podemos agora provar vários teoremas sobre a probabilidade que são importantes para trabalhos posteriores.

Teorema 1-1 Se $A_1(A_2$, então $P(A_1) \leq P(A_2)$ e $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$.

Teorema 1-2 Para cada evento A,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \tag{5}$$

isto é, a probabilidade está entre 0 e 1.

Teorema 1-3

$$P(\varnothing) = 0 \tag{6}$$

isto é, o evento impossível tem a probabilidade zero.

Teorema 1-4 Se A' é o complemento de A, então:

$$P(A') = 1 - P(A) \tag{7}$$

Teorema 1-5 Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \tag{8}$$

Em particular, se $A = S$, o espaço amostral, então:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \tag{9}$$

Teorema 1-6 Se A e B são quaisquer dois eventos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{10}$$

Em um sentido amplo, se A_1, A_2, A_3 são quaisquer três eventos, então:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \tag{11}$$

Generalizações para n eventos também podem ser feitas.

Teorema 1-7 Para quaisquer eventos A e B,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \tag{12}$$

Teorema 1-8 Se um evento A deve resultar na ocorrência de um dos eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ então:

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n) \tag{13}$$

ATRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

Se um espaço amostral S consiste de um número finito de resultados $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então pelo Teorema 1-5,

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \tag{14}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os eventos elementares $A_i = \{a_i\}$.

Deste resultado segue que podemos escolher arbitrariamente números não negativos para as probabilidades destes eventos simples, desde que (14) esteja satisfeito. Em particular, se presumirmos *probabilidades iguais* para todos os eventos simples, então:

$$P(A_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

e se A é um evento formado por h eventos simples, então temos:

$$P(A) = \frac{h}{n} \tag{16}$$

Isto é equivalente à abordagem clássica para a probabilidade dada na página 5. Poderíamos, é claro, usar outros procedimentos para designar probabilidades, como a abordagem frequencial da página 5.

A atribuição de probabilidades fornece um *modelo matemático*, o sucesso do mesmo deve ser testado experimentalmente da mesma forma que as teorias da física ou outras ciências que devem ser testadas pela experimentação.

Exemplo 1.12 Um único dado é lançado uma única vez. Encontre a probabilidade de aparecer 2 ou 5.

O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se atribuirmos probabilidades iguais aos pontos amostrais, isto é, se presumirmos que o dado é honesto, então:

$$P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$$

O evento de aparecer tanto 2 quanto 5 é indicado por $2 \cup 5$. Portanto,

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Sejam A e B dois eventos (Fig. 1-3) tal que $P(A) > 0$. Represente por $P(B \mid A)$ a probabilidade de B *dado que* A ocorreu. Visto que é sabido que A ocorreu, ele se torna, então, o novo espaço amostral substituindo o espaço S original. Isto leva a definição:

$$P(B \mid A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{17}$$

ou

$$P(A \cap B) \equiv P(A)\, P(B \mid A) \tag{18}$$

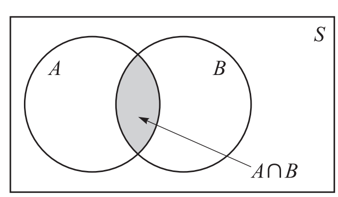


Figura 1-3

Em palavras, (18) diz que a probabilidade de que ambos A e B ocorram é a probabilidade de que A ocorra vezes a probabilidade de que B ocorra, dado que A ocorreu. Denominamos $P(B \mid A)$ como a *probabilidade condicional* de B dado A, isto é, a probabilidade de que B ocorrer dado que A ocorreu. É fácil mostrar que a probabilidade condicional satisfaz aos axiomas da página 5.

Exemplo 1.13 Encontre a probabilidade de que um único lançamento de um dado irá resultar em um número menor do que 4 se (a) nenhuma outra informação é dada e (b) é dado que o lançamento resultou em um número ímpar.

(a) Considere B a representação do evento {menor do que 4}. Visto que B é a união dos eventos 1, 2 ou 3, vimos pelo Teorema 1-5 que:

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

assumindo probabilidades iguais para os pontos amostrais.

(b) Seja A o evento {número impar}, temos que $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Também, que $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Então:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a informação dada de que o lançamento resultou em um número ímpar aumentou a probabilidade de 1/2 para 2/3.

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Teorema 1-9 Para quaisquer três eventos A_1, A_2, A_3, tem-se:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \tag{19}$$

Em palavras, a probabilidade de que A_1 e A_2 e A_3 ocorram é igual a probabilidade de que A_1 ocorra vezes a probabilidade de que A_2 ocorra, dado que A_1 ocorreu vezes a probabilidade de que A_3 ocorra, dado que ambos A_1 e A_2 ocorreram. O resultado é facilmente generalizado para n eventos.

Teorema 1-10 Se um evento A deve resultar em um dos eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$P(A) = P(A_1)\, P(A \mid A_1) + P(A_2)\, P(A \mid A_2) + \cdots + P(A_n)\, P(A \mid A_n) \tag{20}$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Se $P(B \mid A) = P(B)$, isto é, a probabilidade de B ocorrer não é afetada pela ocorrência ou não de A, então dizemos que A e B são *eventos independentes*. Isto é equivalente a:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{21}$$

como visto em (18). Inversamente, se (21) é verdadeiro, então A e B são independentes.

Dizemos que três eventos A_1, A_2, A_3 são independentes se eles são dois a dois independentes:

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k) \qquad j \neq k \qquad \text{onde } j, k = 1, 2, 3 \tag{22}$$

e

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{23}$$

Observe que nem (22) e (23) são, por eles mesmos, suficientes. A independência de mais do que três eventos é facilmente definida.

TEOREMA OU REGRA DE BAYES

Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos mutuamente exclusivos, cuja união é o espaço amostral S, isto é, um dos eventos deve ocorrer. Então, se A é um evento, temos o seguinte teorema importante:

Teorema 1-11 (Regra de Bayes)

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k)\, P(A \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(A \mid A_j)} \tag{24}$$

Isso nos permite encontrar as probabilidades de vários eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que *causam* a ocorrência de A. Por essa razão, o teorema de Bayes é geralmente referido como um *teorema da probabilidade das causas*.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em muitos casos o número de pontos amostrais em um espaço amostral não é muito grande e, assim, a enumeração direta ou a contagem dos pontos amostrais necessários para se obter as probabilidades não é tão difícil. Entretanto, os problemas surgem quando a contagem direta se torna praticamente impossível. Em tais casos, utiliza-se a *análise combinatória*, que poderia ser também chamada de *uma forma sofisticada de contagem.*

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: DIAGRAMAS DE ÁRVORE

Se algo pode ser realizado de n_1 formas diferentes e após isto uma segunda coisa pode ser realizada de n_2 formas diferentes,..., e finalmente uma k-ésima coisa pode ser realizada de n_k formas diferentes, então todas as k coisas podem ser realizadas na ordem especificada de $n_1 n_2 ... n_k$ formas diferentes.

Exemplo 1.14 Se um homem tem 2 camisas e 4 gravatas, então ele tem $2 \times 4 = 8$ formas de combinar uma camisa com uma gravata.

Um diagrama, denominado *diagrama de árvore,* em virtude da aparência (Fig. 1-4), geralmente é usado relacionado ao princípio acima.

Exemplo 1.15 Considere S_1, S_2 a representação das camisas e T_1, T_2, T_3, T_4 a representação das gravatas. As várias formas de combinar uma camisa e uma gravata estão indicadas no diagrama de árvore da Fig. 1-4.

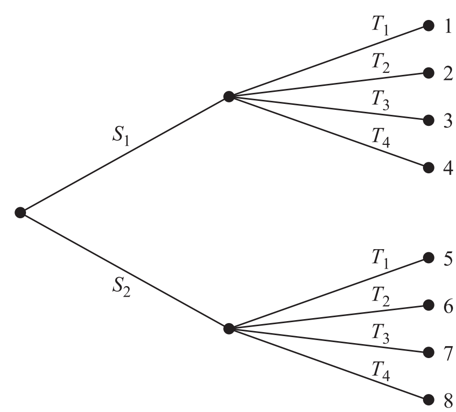


Figura 1-4

PERMUTAÇÕES

Suponha que temos n objetos distintos e gostaríamos de *dispor* r destes objetos em uma linha. Visto que existem n formas de escolher o primeiro objeto e, após a escolha, $n - 1$ formas de escolher o segundo objeto,..., e, finalmente, $n - r + 1$ formas de escolher o *r-ésimo* objeto, segue pelo princípio fundamental da contagem que o número de *disposições* ou *permutações,* como elas são geralmente denominadas, é dado por:

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{25} $$

onde observa-se que o produto tem r fatores. Chamamos de ${}_nP_r$ o *número de permutações de n objetos tomando-se r a cada vez.*

No caso em particular, onde $r = n$, (25) se torna:

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ ...\ 1 = n! \tag{26} $$

que é denominado *n fatorial*. Podemos escrever (25) em termos de fatorial como:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{27} $$

Se $r = n$, vemos que (27) e (26) concordam somente se tivermos $0! = 1$, e, devemos, de fato, tomar isto como a definição de $0!$.

Exemplo 1.16 O número de disposições diferentes ou permutações consistindo de 3 letras cada que podem ser formadas com as 7 letras *A, B, C, D, E, F, G* é:

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Suponha que um conjunto consiste de n objetos dos quais n_1 são de um tipo (isto é, indistinguível um do outro), n_2 são do segundo tipo,..., n_k são *k-ésimo* tipo. Aqui, é claro, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Então o número de permutações diferentes dos objetos é:

$$_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!} \tag{28}$$

Veja o Problema 1.25.

Exemplo 1.17 O número de permutações diferentes das 11 letras da palavra *M I S S I S S I P P I*, que consiste de 1 *M*, 4 *I*, 4 *S* e 2 *P* é:

$$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34.650$$

COMBINAÇÕES

Em uma permutação estamos interessados na ordem da disposição dos objetos. Por exemplo, *abc* é uma permutação diferente de *bca*. Em muitos problemas, entretanto, estamos interessados somente na seleção ou escolha dos objetos sem considerar a ordem. Tais seleções são chamadas de *combinações*. Por exemplo, *abc* e *bca* são a mesma combinação.

O número total de combinações de r objetos selecionados de n (também chamado de *combinações de n coisas tomadas r a cada vez*) é representado por $_nC_r$ ou $\binom{n}{r}$. Temos (veja o Problema 1.27):

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{29}$$

Ela pode ser escrita também:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{_nP_r}{r!} \tag{30}$$

É fácil mostrar que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{ou} \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \tag{31}$$

Exemplo 1.18 O número de formas nas quais 3 cartas podem ser escolhidas ou selecionadas de um total de 8 cartas diferentes é:

$$_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

COEFICIENTE BINOMIAL

Os números em (29) são geralmente chamados de *coeficientes binomiais* porque eles aparecem na *expansão binomial*.

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \tag{32}$$

Eles têm muitas propriedades interessantes.

Exemplo 1.19

$$(x + y)^4 = x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

APROXIMAÇÃO DE STIRLING PARA *n*!

Quando n é grande, uma avaliação direta de n! pode ser impraticável. Em tais casos pode-se usar uma fórmula aproximada:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{33}$$

onde $e = 2{,}71828...$, que é a base dos logaritmos naturais. O símbolo $\sim$ em (33) significa que a razão do lado esquerdo para o lado direito se aproxima de 1 quando $n \to \infty$.

A tecnologia computacional ofuscou amplamente o valor da fórmula de Stirling para cálculos numéricos, mas a aproximação permanece válida para estimativas teóricas (veja o Apêndice A).

Problemas Resolvidos

Experimentos aleatórios, espaços amostrais e eventos

1.1 Uma carta é extraída ao acaso de um baralho comum de 52 cartas. Descreva o espaço amostral se os naipes (a) não são considerados e (b) são considerados.

(a) Se não levamos em consideração os naipes, o espaço amostral consiste de ás, dois,..., dez, valete, rainha, rei e ele pode ser indicado como {1, 2,..., 13}.

(b) Se levamos em consideração os naipes, o espaço amostral consiste de ás de copas, espadas, ouros e paus;...; rei de copas, espadas, ouros e paus. Representando copas, espadas, ouros e paus, respectivamente, por 1, 2, 3, 4, por exemplo, podemos indicar um valete de espadas por (11, 2). O espaço amostral então, consiste de 52 pontos mostrados na Fig. 1-5.

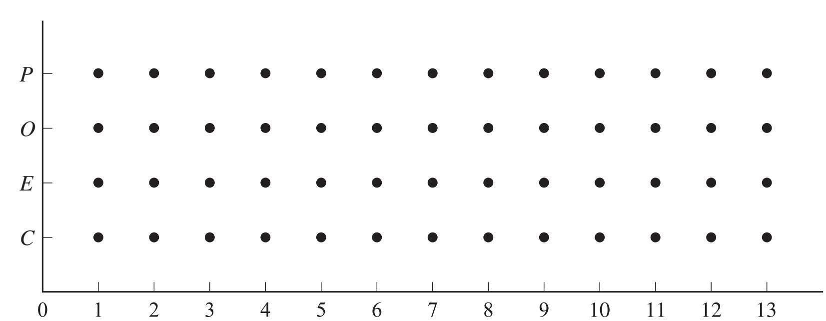


Figura 1-5

1.2 Com referência ao experimento do Problema 1.1, considere A o evento (rei é extraído) ou simplesmente (rei) e B o evento (naipe de paus é extraído). Descreva os eventos (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \cup B'$, (d) $A' \cup B'$, (e) $A - B$, (f) $A' - B'$, (g) $(A \cap B) \cup (A \cap B')$.

(a) $A \cup B$ = {ou rei ou naipe de paus (ou ambos, isto é, rei de paus)}.

(b) $A \cap B$ = {ambos, rei e naipe de paus} = {rei de paus}.

(c) Visto que B = {naipe de paus}, B' = {não naipe de paus} = {copas, ouros, espadas}.

Então, $A \cup B'$ = {rei ou copas ou ouros ou espadas}.

(d) $A' \cup B'$ = {não rei e não naipe de paus} = {não rei de paus} = {qualquer carta, exceto o rei de paus}.

Isto pode também ser visto, observando que $A' \cup B' = (A \cap B')$ e usando (b).

(e) $A - B$ = {rei, mas não naipe de paus}.

Isto é o mesmo que $A \cap B'$ = {rei e não naipe de paus}.

(f) $A' - B' = \{$não rei e não "não naipe de paus"$\} = \{$não rei e naipe de paus$\} = \{$qualquer naipe de paus, exceto rei$\}$. Isto também pode ser visto, observando que $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B$.

(g) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = \{$(rei e naipe de paus) ou (rei e não naipe de paus) $= \{$rei$\}$. Isto também pode ser visto observando que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

1.3 Use a Fig. 1-5 para descrever os eventos (a) $A \cup B$, (b) $A' \cap B'$.

Os eventos necessários estão indicados na Fig. 1-6. De uma forma similar, todos os eventos do Problema 1.2 podem também ser indicados em tais diagramas. Deve ser observado da Fig. 1-6 que $A' \cap B'$ é o complemento de $A \cup B$.

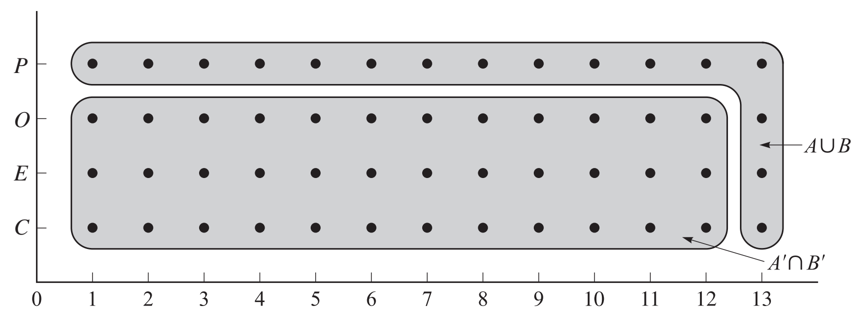


Figura 1-6

Teoremas sobre probabilidade

1.4 Prove (a) o Teorema 1-1, (b) o Teorema 1-2, (c) o Teorema 1-3, da página 5.

(a) Temos $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ onde A_1 e $A_2 - A_1$ são mutuamente exclusivos. Então, pelo Axioma 3, da página 5:

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$

então:

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

Visto que $P(A_2 - A_1) \geq 0$ pelo o Axioma 1, página 5, segue que $P(A_2) \geq P(A_1)$.

(b) Sabemos que $P(A) \geq 0$ pelo Axioma 1. Para provar que $P(A) \leq 1$, primeiro observamos que A (S. Portanto, pelo Teorema 1-1 [parte (a)] e Axioma 2,

$$P(A) \leq P(S) = 1$$

(c) Temos $S = S \cup \varnothing$. Visto que $S \cap \varnothing = \varnothing$, segue do Axioma 3 que:

$$P(S) = P(S) + P(\varnothing) \qquad \text{ou} \qquad P(\varnothing) = 0$$

1.5 Prove (a) o Teorema 1-4, (b) o Teorema 1-6.

(a) Temos que $A \cup A' = S$. Então, visto que $A \cap A' = \varnothing$, temos:

$$P(A \cup A') = P(S) \qquad \text{ou} \qquad P(A) + P(A') = 1$$

isto é,

$$P(A') = 1 - P(A)$$

(b) Temos do diagrama Venn da Fig.1-7,

(1)
$$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$$

Então, visto que os conjuntos A e $B - (A \cap B)$ são mutuamente exclusivos, temos, usando o Axioma 3 e o Teorema 1-1,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P[B - (A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

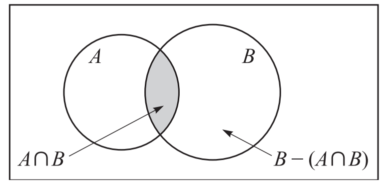


Figura 1-7

Cálculo de probabilidades

1.6 Uma carta é extraída ao acaso de um baralho comum de 52 cartas. Encontre a probabilidade de que ela seja (a) um ás, (b) um valete de copas, (c) um três de paus ou um seis de ouros, (d) um naipe de copas, (e) qualquer naipe, exceto copas, (f) um dez ou um naipe de espadas, (g) nem um quatro e nem um naipe de espadas.

Vamos usar para simplificar H, S, D, C para indicar os naipes de copas, espadas, ouros e paus respectivamente, e 1, 2,..., 13 para ás, dois,..., rei. Então, $3 \cap H$ significa três de copas, enquanto que $3 \cup H$ significa três ou copas. Vamos usar o espaço amostral do Problema 1.1 (b), atribuindo probabilidades iguais de 1/52 para cada ponto amostral. Por exemplo, $P(6 \cap C) = 1/52$.

(a)
$$\begin{aligned} P(1) &= P(1 \cap H \text{ ou } 1 \cap S \text{ ou } 1 \cap D \text{ ou } 1 \cap C) \\ &= P(1 \cap H) + P(1 \cap S) + P(1 \cap D) + P(1 \cap C) \\ &= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \end{aligned}$$

Isto também poderia ser obtido do espaço amostral do Problema 1.1 (a) onde cada ponto amostral, um ás em particular, tem probabilidade 1/13. Poderíamos ter chegado a este resultado simplesmente considerando que existem 13 números e, assim, cada um tem probabilidade de 1/13 de ser extraído.

(b) $P(11 \cap H) = \dfrac{1}{52}$

(c) $P(3 \cap C \text{ ou } 6 \cap D) = P(3 \cap C) + P(6 \cap D) = \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{52} = \dfrac{1}{26}$

(d) $P(H) = P(1 \cap H \text{ ou } 2 \cap H \text{ ou} \ldots 13 \cap H) = \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{52} + \cdots + \dfrac{1}{52} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

Isto também poderia ter sido obtido, observando que existem quatro naipes, onde cada um tem probabilidade igual a 1/4 de ser extraído.

(e) $P(H') = 1 - P(H) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ usando a parte (d) e o Teorema 1-4, página 6.

(f) Visto que 10 e S não são mutuamente exclusivos, temos, do Teorema 1-6,

$$P(10 \cup S) = P(10) + P(S) - P(10 \cap S) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

(g) A probabilidade de que não se tenha nem quatro ou nem paus pode ser representada por $P(4' \cap C')$. Mas, $4' \cap C' = (4 \cup C')$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P(4' \cap C') = P[(4 \cup C)'] &= 1 - P(4 \cup C) \\ &= 1 - [P(4) + P(C) - P(4 \cap C)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}\right] = \frac{9}{13} \end{aligned}$$

Poderíamos, também, chegar a isso observando que o diagrama favorável a este evento é o complemento do evento destacado na Fig. 1-8. Visto que este complemento tem 52 – 16 = 36 pontos amostrais e que cada um desses pontos amostrais tem uma probabilidade de 1/52, a probabilidade solicitada é 36/52 = 9/13.

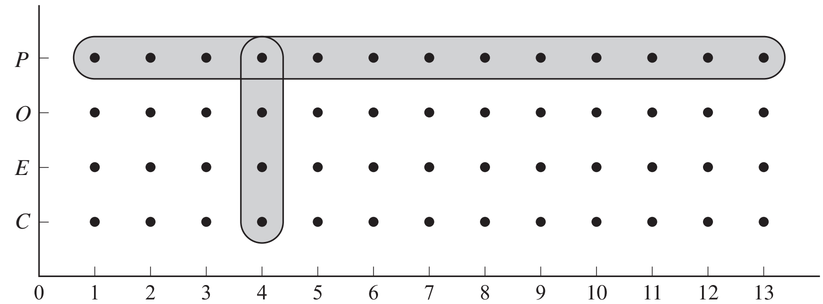


Figura 1-8

1.7 Uma bola é extraída ao acaso de uma caixa contendo 6 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis. Determine a probabilidade de que ela seja (a) vermelha, (b) branca, (c) azul, (d) não vermelha, (e) vermelha ou branca.

(a) **Método 1**
Considere R, W e B a representação dos eventos de extrair uma bola vermelha, uma branca e uma azul, respectivamente. Então:

$$P(R) = \frac{\text{maneiras de retirar uma bola vermelha da urna}}{\text{total de maneiras de retirar uma bola da urna}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Método 2
Nosso espaço amostral consiste de $6 + 4 + 5 = 15$ pontos amostrais. Então, se atribuirmos probabilidades iguais a 1/15 para cada ponto amostral, temos que $P(R) = 6/15 = 2/5$, visto que existem 6 pontos amostrais correspondentes a "bola vermelha".

(b) $P(W) = \dfrac{4}{6+4+5} = \dfrac{4}{15}$

(c) $P(B) = \dfrac{5}{6+4+5} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

(d) $P(\text{não vermelha})\ P(R') = 1 - P(R) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$ pela parte (a).

(e) **Método 1**

$$P(\text{vermelha ou branca}) = P(R \cup W) = \frac{\text{maneiras de escolher uma bola vermelha ou branca}}{\text{total de maneiras de escolher uma bola}}$$
$$= \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Isto também pode ser obtido utilizando o espaço amostral como na parte (a).

Método 2

$$P(R \cup W) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ pela parte (c).}$$

Método 3

Visto que os eventos R e W são mutuamente exclusivos, segue de (4), página 5, que:

$$P(R \cup W) = P(R) + P(W) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

Probabilidade condicional e eventos independentes

1.8 Um dado honesto é lançado duas vezes. Encontre a probabilidade de se obter 4, 5 ou 6 no primeiro lançamento e 1, 2, 3 ou 4 no segundo lançamento.

Considere A_1 o evento "4, 5 ou 6 no primeiro lançamento" e A_2 o evento "1, 2, 3 ou 4 no segundo lançamento". Então, estamos procurando por $P(A_1 \cap A_2)$.

Método 1

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

Usamos aqui o fato de que o resultado do segundo lançamento é *independente* do primeiro, tal que $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$. Usamos, também, $P(A_1) = 3/6$ (visto que 4, 5 ou 6 são 3 das 6 possibilidades igualmente prováveis) e $P(A_2) = 4/6$ (visto que 1, 2, 3 ou 4 são 4 e das 6 possibilidades igualmente prováveis).

Método 2

Cada uma das 6 maneiras nas quais um dado pode cair no primeiro lançamento podem estar associadas com cada uma das 6 maneiras nas quais ele pode cair no segundo lançamento, um total de $6 \times 6 = 36$ maneiras, todas igualmente prováveis.

Cada uma das 3 maneiras que A_1 pode ocorrer pode ser associada com cada uma das 4 maneiras nas quais A_2 pode ocorrer para fornecer $3 \times 4 = 12$ maneiras em que ambos A_1 e A_2 podem ocorrer. Então:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Isto mostra diretamente que A_1 e A_2 são independentes uma vez que:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = P(A_1)P(A_2)$$

1.9 Encontre a probabilidade de não se obter um total de 7 ou 11 nos dois lançamentos de um par de dados honestos.

O espaço amostral para cada lançamento do dado é exibido na Fig. 1-9. Por exemplo, (5, 2) significa que saiu 5 no primeiro dado e 2 no segundo. Visto que os dados são honestos e existem 36 pontos amostrais, atribuímos probabilidades de 1/36 para cada um.

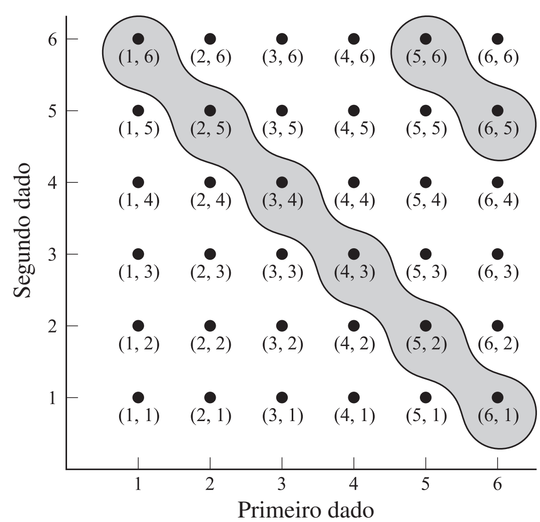


Figura 1-9

Se consideramos A o evento "7 ou 11", então A é indicado pela porção destacada na Fig. 1-9. Visto que 8 pontos estão incluídos, temos $P(A) = 8/36 = 2/9$. Segue que a probabilidade de não 7 ou 11 é dada por:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Usando os subscritos 1, 2 para representar o primeiro e o segundo lançamentos do dado, vemos que a probabilidade de não 7 ou 11 tanto no primeiro quanto no segundo lançamento é dada por:

$$P(A'_1)P(A'_2 \mid A'_1) = P(A'_1)P(A'_2) = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81},$$

usando o fato de que os lançamentos são independentes.

1.10 Duas cartas são extraídas de um baralho muito bem embaralhado de 52 cartas. Encontre a probabilidade de que ambas são ás se a primeira carta for (a) reposta, (b) não reposta.

Método 1

Considere A_1 = evento "ás na primeira extração" e A_2 = evento "ás na segunda extração". Então, estamos procurando por $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)$.

(a) Visto que para a primeira extração existem quatro ases nas 52 cartas, $P(A_1) = 4/52$. Também, se a carta é reposta para a segunda extração, então $P(A_2 \mid A_1) = 4/52$, visto que também existem 4 ases nas 52 cartas na segunda extração. Então:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{1}{169}$$

(b) Como na parte (a), $P(A_1) = 4/52$. Entretanto, se ocorrer um ás na primeira extração, permanecerão somente 3 ases nas 51 cartas restantes, tal que $P(A_2 \mid A_1) = 3/51$. Então:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) = \frac{1}{221}$$

Método 2

(a) A primeira carta pode ser extraída em uma de 52 maneiras possíveis, e visto que existe reposição, a segunda carta também pode ser extraída em uma de 52 maneiras. Então, ambas as cartas podem ser extraídas de 52×52 maneiras, todas igualmente prováveis.

Neste caso, existem 4 maneiras de escolher um ás na primeira extração e 4 maneiras de escolher um ás na segunda extração, tal que o número de maneiras de escolher ases na primeira e segunda extrações é 4×4. Então, a probabilidade solicitada é:

$$\frac{(4)(4)}{(52)(52)} = \frac{1}{169}$$

1.11 Três bolas são extraídas sucessivamente da caixa do Problema 1.7. Encontre a probabilidade de que elas são extraídas na seguinte ordem: vermelha, branca e azul, se cada bola é (a) reposta após ser extraída, (b) não reposta.

Considere R_1 = o evento "bola vermelha na primeira extração", W_2 = o evento "bola branca na segunda extração", B_3 = o evento "bola azul na terceira extração". É necessário que $P(R_1 \cap W_2 \cap B_3)$.

(a) Se cada bola é reposta, então os eventos são independentes e:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap W_2 \cap B_3) &= P(R_1)P(W_2 \mid R_1)P(B_3 \mid R_2 \cap W_2) \\ &= P(R_1)P(W_2)P(B_3) \\ &= \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \frac{8}{225} \end{aligned}$$

(b) Se a bola extraída não é resposta, então os eventos são dependentes e:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap W_2 \cap B_3) &= P(R_1)P(W_2 \mid R_1)P(B_3 \mid R_1 \cap W_2) \\ &= \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right) = \frac{4}{91} \end{aligned}$$

1.12 Encontre a probabilidade de sair um 4 pelo menos uma vez em dois lançamentos de um dado honesto.

Considere A_1 = o evento "4 no primeiro lançamento" e A_2 = o evento "4 no segundo lançamento". Então:

$A_1 \cup A_2$ = evento "4 no primeiro lançamento ou 4 no segundo lançamento ou ambos"
= evento "pelo menos um 4 é obtido"

e queremos calcular $P(A_1 \cup A_2)$.

Método 1

Os eventos A_1 e A_2 não são mutuamente exclusivos, mas eles são independentes. Portanto, por (10) e (21),

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Método 2

$$P(\text{pelo menos um 4 é obtido}) + P(\text{nenhum 4 é obtido}) = 1$$

Então:

$$\begin{aligned} P(\text{pelo menos um 4 é obtido}) &= 1 - P(\text{nenhum 4 é obtido}) \\ &= 1 - P(\text{nenhum 4 obtido no primeiro lançamento e nenhum 4 obtido no segundo}) \\ &= 1 - P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - P(A'_1)P(A'_2) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Método 3

Número total de maneiras igualmente prováveis nas quais ambos os dados podem cair $= 6 \times 6 = 36$.

Também: Número de maneiras nas quais A_1 ocorre, mas não $A_2 = 5$
Número de maneiras nas quais A_2 ocorre, mas não $A_1 = 5$
Número de maneiras nas quais A_1 e A_2 ocorrem $= 1$

Então, o número de maneiras nas quais pelo menos um dos eventos A_1 ou A_2 ocorrem $= 5 + 5 + 1 = 11$. Portanto, $P(A_1 \cup A_2) = 11/36$.

1.13 Uma urna contém 4 bolas brancas e 2 pretas; outra contém 3 bolas brancas e 5 pretas. Se uma bola é extraída de cada urna, encontre a probabilidade de que (a) ambas sejam brancas, (b) ambas sejam pretas, (c) uma seja branca e outra preta.

Considere W_1 = evento "bola branca da primeiro urna", W_2 = evento "bola branca da segunda urna".

(a) $P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1) = P(W_1)P(W_2) = \left(\frac{4}{4+2}\right)\left(\frac{3}{3+5}\right) = \frac{1}{4}$

(b) $P(W'_1 \cap W'_2) = P(W'_1)P(W'_2 \mid W'_1) = P(W'_1)P(W'_2) = \left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{5}{3+5}\right) = \frac{5}{24}$

(c) A probabilidade solicitada é:

$$1 - P(W_1 \cap W_2) - P(W'_1 \cap W'_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

1.14 Prove o Teorema 1-10, página 8.

Provaremos o teorema para o caso $n = 2$. As extensões para valores maiores de n podem ser feitas com facilidade. Se o evento A deve resultar em um de dois eventos mutuamente exclusivos A_1, A_2, então:

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$$

Mas, $A \cap A_1$ e $A \cap A_2$ são mutuamente exclusivos desde que A_1 e A_2 o sejam. Portanto, pelo Axioma 3:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) \\ &= P(A_1)\, P(A \mid A_1) + P(A_2)\, P(A \mid A_2) \end{aligned}$$

usando (18), página 7.

1.15 A Caixa *I* contém 3 bolas de gude vermelhas e 2 bolas de gude azuis, enquanto que a Caixa *II* contém 2 bolas de gude vermelhas e 8 bolas de gude azuis. Uma moeda honesta é lançada. Se a moeda der cara, uma bola de gude é escolhida da Caixa *I*; se der coroa, uma bola de gude é escolhida da Caixa *II*. Encontre a probabilidade de que uma bola de gude vermelha seja escolhida.

Considere R como a representação do evento "uma bola de gude vermelha é escolhida" enquanto I e II representam os eventos Caixa I e Caixa II são escolhidas, respectivamente. Visto que uma bola de gude vermelha pode resultar tanto na escolha da Caixa I quanto da II, podemos usar os resultados do Problema 1.14 com $A = R$, $A_1 = I$, $A_2 = II$. Portanto, a probabilidade de escolher uma bola de gude vermelha é:

$$P(R) = P(I)P(R \mid I) + P(II)P(R \mid II) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right) = \frac{2}{5}$$

Teorema ou regra de Bayes

1.16 Prove o teorema de Bayes (Teorema 1-11, página 8).

Visto que A resulta em um dos eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, temos pelo teorema 1-10 (Problema 1.14):

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + \cdots + P(A_n)P(A \mid A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A \mid A_j)$$

Portanto,

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_k)P(A \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A \mid A_j)}$$

1.17 Suponha que, no Problema 1.15, aquela pessoa que lançou a moeda não revele se deu cara ou coroa (assim, a caixa da qual a bola de gude foi escolhida não é conhecida), mas revele que uma bola de gude vermelha foi escolhida. Qual é a probabilidade de que a Caixa *I* foi a escolhida (isto é, a moeda deu cara)?

Vamos usar a mesma terminologia do Problema 1.15, isto é, $A = R$, $A_1 = I$, $A_2 = II$. Procuramos a probabilidade de que a Caixa I foi a escolhida dado que sabemos que uma bola de gude vermelha foi retirada. Usando a regra de Bayes, com $n = 2$, está probabilidade é dada por:

$$P(I \mid R) = \frac{P(I)P(R \mid I)}{P(I)P(R \mid I) + P(II)P(R \mid II)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right)} = \frac{3}{4}$$

Análise combinatória, contagem e diagramas de árvore

1.18 Um comitê com três membros é formado consistindo de um representante dos trabalhadores, um da gerência e um do público. Se existem três representantes possíveis dos trabalhadores, 2 da gerência e 4 do público, determine quantos comitês diferentes podem ser formados usando (a) o princípio fundamental da contagem e (b) um diagrama de árvore.

(a) Podemos escolher um representante dos trabalhadores de 3 maneiras diferentes e após um representante da gerência de 2 maneiras diferentes. Assim, existem $3 \times 2 = 6$ maneiras diferentes de escolher um representante dos trabalhadores e um da gerência. Para cada uma destas maneiras podemos escolher um representante do público de 4 maneiras diferentes. Portanto, o número de comitês diferentes que podem ser formados é $3 \times 2 \times 4 = 24$.

(b) Represente os 3 representantes dos trabalhadores por L_1, L_2, L_3; os representantes da gerência por M_1, M_2; e os representantes do público por P_1, P_2, P_3, P_4. Assim, o diagrama de árvore da Fig. 1-10 mostra que existem 24 comitês diferentes no total. A partir do diagrama de árvore podemos listar todos diferentes comitês, por exemplo, $L_1M_1P_1$, $L_1M_1P_2$, etc.

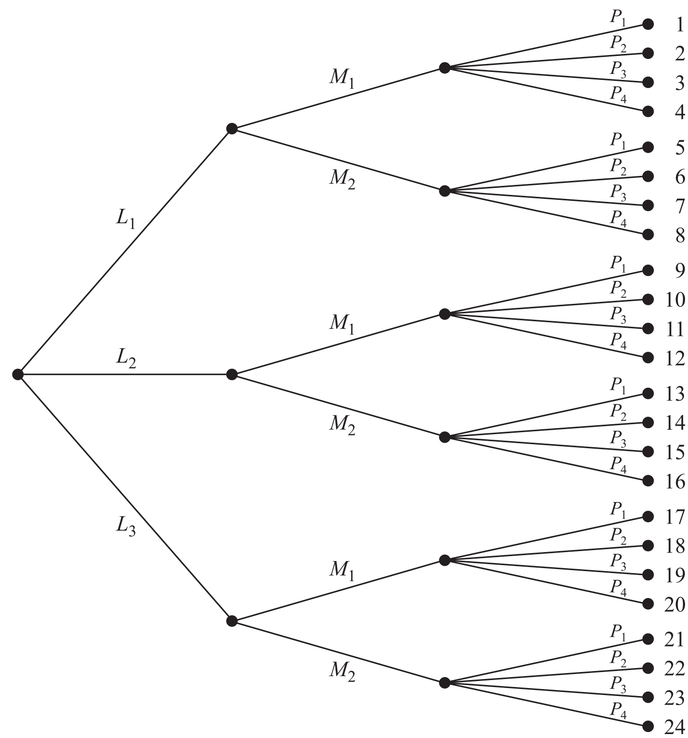


Figura 1-10

Permutações

1.19 De quantas maneiras 5 bolas de gude coloridas podem ser dispostas em uma linha?

Devemos dispor as 5 bolas de gude em 5 posições da forma: – – – – –. A primeira posição pode ser ocupada por qualquer uma das 5 bolas de gude, isto é, existem 5 maneiras de preencher a primeira posição. Quando isto for feito, existem 4 maneiras de preencher a segunda posição. Então, existem 3 maneiras de preencher a terceira posição, 2 maneiras de preencher a quarta posição e, finalmente, somente 1 maneira de preencher a última posição. Portanto:

$$\text{Número de disposições de 5 bolas de gude em uma linha} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120.$$

Em geral,

$$\text{Número de maneiras de dispor } n \text{ objetos diferentes em uma linha} = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

Isto também é chamado de *número de permutações de n objetos diferentes tomando n a cada vez* e é representado por ${}_nP_n$.

1.20 De quantas maneiras 10 pessoas podem sentar-se em um banco com somente 4 lugares disponíveis?

O primeiro lugar pode ser preenchido por uma de 10 maneiras e quando isto for feito, existem 9 maneiras de preencher o segundo lugar, 8 maneiras de preencher o terceiro lugar e 7 maneiras de preencher o quarto lugar. Portanto,

$$\text{Número de disposições de 10 pessoas tomando 4 de cada vez} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Em geral,

$$\text{Número de disposições de } n \text{ objetos diferentes tomando } r \text{ a cada vez } n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

Isto também é chamado de *número de permutações de n objetos diferentes tomados r a cada vez* e é representado por ${}_nP_r$. Observe que quando $r = n$, ${}_nP_r = n!$ como no Problema 1.19.

1.21 Avalie (a) ${}_8P_3$, (b) ${}_6P_4$, (c) ${}_{15}P_1$, (d) ${}_3P_3$.

(a) ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (b) ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ (c) ${}_{15}P_1 = 15$ (d) ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

1.22 É solicitado que 5 homens e 4 mulheres sentem em fila, de forma que as mulheres ocupem os lugares pares. Quantas disposições são possíveis?

Os homens podem sentar em ${}_5P_5$ maneiras e as mulheres em ${}_4P_4$ maneiras. Cada disposição de homens pode estar associada com uma disposição das mulheres. Portanto,

$$\text{Número de maneiras} = {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!\,4! = (120)(24) = 2880.$$

1.23 Quantos números de quatro dígitos podem ser formados com os 10 dígitos 0, 1, 2, 3,..., 9 se (a) as repetições são permitidas, (b) as repetições não são permitidas, (c) o último dígito deve ser zero e as repetições não são permitidas?

(a) O primeiro dígito pode ser qualquer um de 9 (visto que 0 não é permitido). O segundo, terceiro e quarto dígitos podem ser qualquer um de 10. Então, $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números podem ser formados.

(b) O primeiro dígito pode ser qualquer um de 9 (exceto 0).

O segundo dígito pode ser qualquer um de 9 (exceto aquele usado anteriormente).

O terceiro dígito pode ser qualquer um 8 (exceto aqueles usados para os primeiros dois dígitos).

O quarto dígito pode ser qualquer um de 7 (exceto aqueles usados para os primeiros três dígitos).

Então, $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ números podem ser formados.

Outro método

O primeiro dígito pode ser qualquer um de 9, e os três restantes podem ser escolhidos de ${}_9P_3$ maneiras. Então, $9 \times 9P_3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ números podem ser formados.

(c) O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 maneiras, o segundo de 8 maneiras e o terceiro de 7 maneiras. Então, $9 \times 8 \times 7 = 504$ números podem ser formados.

Outro método

O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 maneiras e os próximos dois dígitos de ${}_8P_2$ maneiras. Então, $9 \times {}_8P_2 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ números podem ser formados.

1.24 Quatro livros de matemática diferentes, seis livros de física diferentes e dois livros de química diferentes devem ser dispostos em uma estante. Quantas disposições diferentes são possíveis se (a) os livros sobre um assunto em particular devem ficar todos juntos, (b) somente os livros de matemática devem ficar juntos?

(a) Os livros de matemática podem ser dispostos entre eles de ${}_4P_4 = 4!$ maneiras, os livros de física de ${}_6P_6 = 6!$ maneiras, os livros de química de ${}_2P_2 = 2!$ maneiras e os três grupos em ${}_3P_3 = 3!$ maneiras. Portanto,

$$\text{Número de disposições} = 4!6!2!3! = 207.360.$$

(b) Considere os quatro livros de matemática como um livro grande. Assim, temos 9 livros que podem ser dispostos de ${}_9P_9 = 9!$ maneiras. De todas estas maneiras os livros de matemática estão juntos. Mas, os livros de matemática podem ser dispostos entre eles de ${}_4P_4 = 4!$ maneiras. Portanto,

$$\text{Número de disposições} = 9!4! = 8.709.120.$$

1.25 Cinco bolas de gude vermelhas, duas bolas de gude brancas e três bolas de gude azuis são dispostas em uma linha. Se todas as bolas de gude da mesma cor não são distinguíveis umas das outras, quantas disposições diferentes são possíveis?

Suponha que existem N disposições diferentes. Multiplicando N pelo número de maneiras de dispor (a) as cinco bolas de gude entre elas mesmas, (b) as duas bolas de gude brancas entre elas mesmas e (c) as três bolas de gude azuis entre elas mesmas (isto é, multiplicando N por 5!2!3!), obtemos o número de maneiras de dispor 10 bolas de gude se elas fossem distinguíveis, isto é, 10!.

Então: $$(5!2!3!)N = 10! \quad \text{e} \quad N = 10!/(5!2!3!)$$

Em geral, o número de disposições diferentes de n objetos, dos quais n_1 são similares, n_2 são similares,..., n_k são similares é $\dfrac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$ onde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

1.26 De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa se (a) elas podem sentar em qualquer lugar, (b) 2 pessoas em particular não devem sentar uma ao lado da outra?

(a) Vamos permitir que 1 delas sente em qualquer lugar. Então, as 6 pessoas restantes podem sentar $6! = 720$ maneiras, que é o total do número de maneiras de dispor 7 pessoas em um círculo.

(b) Considere 2 pessoas em particular como 1 pessoa. Então, existe um total de 6 pessoas, e elas podem ser dispostas de 5! maneiras. Mas, as 2 pessoas consideradas 1 podem ser dispostas de 2! maneiras. Portanto, o número de maneiras de dispor 7 pessoas em uma mesa redonda com 2 pessoas em particular sentando juntas $= 5!2! = 240$.

Então, usando (a), o número total de maneiras na qual 7 pessoas podem sentar em uma mesa redonda de modo que 2 pessoas em particular não sentem juntas $= 730 - 240 = 480$ maneiras.

Combinações

1.27 De quantas maneiras 10 objetos podem ser divididos em dois grupos contendo 4 e 6 objetos, respectivamente?

Isto é o mesmo que o número de maneiras de dispor 10 objetos dos quais 4 são similares e os outros 6 objetos são também similares entre si. Pelo Problema 1.25, isto é $\dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$

O problema é equivalente a encontrar o número de seleções de 4 de 10 objetos (ou 6 de 10 objetos), a ordem da seleção sendo secundária. Em geral, o número de seleções de r de n objetos, chamada de *número de combinações de n objetos tomados r a cada vez*, é representado por ${}_nC_r$ ou $\binom{n}{r}$ é dado por:

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

1.28 Avalie (a) ${}_7C_4$, (b) ${}_6C_5$, (c) ${}_4C_4$.

(a) ${}_7C_4 = \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$

(b) ${}_6C_5 = \dfrac{6!}{5!1!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!} = 6$, ou ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6.$

(c) ${}_4C_4$ é o número de seleções de 4 objetos tomados 4 a cada vez e existe, neste caso, somente uma possiblidade. Então, ${}_4C_4 = 1$. Observe que formalmente:

$${}_4C_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1 \text{ se } \textit{definirmos } 0! = 1.$$

1.29 De quantas maneiras um comitê formado por 5 pessoas pode ser escolhido de 9 pessoas?

$$\binom{9}{5} = {}_9C_5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$$

1.30 De 5 matemáticos e 7 físicos, um comitê consistindo de 2 matemáticos e 3 físicos está para ser formado. De quantas maneiras isto pode ser feito se (a) qualquer matemático e qualquer físico podem ser incluídos, (b) um físico em particular deve estar no comitê, (c) dois matemáticos em particular não podem estar no comitê?

(a) 2 matemáticos de 5 podem ser selecionados de ${}_5C_2$ maneiras.

3 físicos de 7 podem ser selecionados de ${}_7C_3$ maneiras.

Número total de seleções possíveis $= {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 = 10 \cdot 35 = 350$

(b) 2 matemáticos de 5 podem ser selecionados de ${}_5C_2$ maneiras.

2 físicos de 6 podem ser selecionados de ${}_6C_2$ maneiras.

Número total de seleções possíveis $= {}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 10 \cdot 15 = 150$

(c) 2 matemáticos de 3 podem ser selecionados de ${}_3C_2$ maneiras.

3 físicos de 7 podem ser selecionados de ${}_7C_3$ maneiras.

Número total de seleções possíveis $= {}_3C_2 \cdot {}_7C_3 = 3 \cdot 35 = 105$

1.31 Quantas saladas diferentes podem ser feitas com alface, escarola, endívia, agrião e chicória?

Cada folha verde pode ser tratada de 2 maneiras, ela pode ser escolhida ou não. Visto que cada uma das 2 maneiras de tratar com uma folha verde está associada com as 2 maneiras de tratar com as outras folhas verdes, o número de maneiras de tratar com as 5 folhas verdes = 2^5 maneiras. Mas, 2^5 maneiras incluem o caso no qual nenhuma folha verde é escolhida. Portanto,

$$\text{Número de saladas} = 2^5 - 1 = 31$$

Outro método

Podemos selecionar tanto 1 de 5 folhas verdes, quanto 2 de 5 folhas verdes,...., 5 de 5 folhas verdes. Então, o número necessário de saladas é

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Em geral, para qualquer n inteiro positivo, ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + ... + {}_nC_n = 2^n - 1$.

1.32 De 7 consoantes e 5 vogais, quantas palavras podem ser formadas, consistindo de 4 consoantes diferentes e 3 vogais diferentes? As palavras não precisam ter significado.

As 4 consoantes diferentes podem ser selecionadas de ${}_7C_4$ maneiras, as 3 vogais diferentes podem ser selecionadas de ${}_5C_3$ maneiras e as 7 letras diferentes resultantes (4 consoantes, 3 vogais) podem ser dispostas entre elas em ${}_7P_7 = 7!$ maneiras. Então:

$$\text{Número de palavras} = {}_7C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1.764.000$$

Coeficientes binomiais

1.33 Prove que $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

Temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

O resultado tem a seguinte aplicação interessante. Se escrevermos os coeficientes da expansão binomial de $(x + y)^n$ para $n = 0, 1, 2,...,$ obteremos o seguinte arranjo, chamado de *triângulo de Pascal*:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\text{etc.} & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Uma entrada em qualquer linha pode ser obtida adicionando as duas entradas na linha precedente que estão a sua direita e esquerda. Portanto, $10 = 4 + 6$, $15 = 10 + 5$, etc.

1.34 Encontre o termo constante na expansão de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

De acordo com o teorema binomial:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(x^2)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{3k-12}.$$

O termo constante corresponde àquele para o qual $3k-12=0$, isto é, $k=4$ e, portanto, dado por

$$\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495$$

Probabilidade usando análise combinatória

1.35 Uma caixa contém 8 bolas vermelhas, 3 brancas e 9 azuis. Se 3 bolas são extraídas ao acaso sem substituição, determine a probabilidade de que (a) todas as 3 são vermelhas, (b) todas as 3 são brancas, (c) 2 são vermelhas e 1 é branca, (d) pelo menos 1 é branca, (e) 1 de cada cor é extraída, (f) as bolas são extraídas na ordem vermelha, branca, azul.

(a) **Método 1**

Considere R_1, R_2, R_3 a representação dos eventos "bola vermelha na primeira extração", "bola vermelha na segunda extração", "bola vermelha na terceira extração", respectivamente. Então, $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ representa o evento "todas as 3 bolas extraídas são vermelhas". Assim, temos:

$$\begin{aligned}P(R_1\cap R_2\cap R_3)&=P(R_1)P(R_2\mid R_1)P(R_3\mid R_1\cap R_2)\\&=\left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{6}{18}\right)=\frac{14}{285}\end{aligned}$$

Método 2

$$\text{Probabilidade solicitada}=\frac{\text{número de maneiras de extrair 3 de 8 bolas vermelhas}}{\text{número de maneiras de extrair 2 de 20 bolas}}=\frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{14}{285}$$

(b) Usando o segundo método indicado na parte (a):

$$P(\text{as 3 brancas})=\frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{1}{1140}$$

O primeiro método indicado na parte (a) também pode ser usado.

(c) P(2 são vermelhas e 1 é branca)

$$\begin{aligned}&=\frac{(\text{maneiras de extrair 2 de 8 bolas vermelhas})(\text{maneiras de extrair 1 de 3 bolas brancas})}{(\text{maneiras de extrair 3 de 20 bolas})}\\&=\frac{({}_8C_2)({}_3C_1)}{{}_{20}C_3}=\frac{7}{95}\end{aligned}$$

(d) $P(\text{nenhuma ser branca})=\dfrac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3}=\dfrac{34}{57}$. Então:

$$P(\text{pelo menos 1 ser branca})=1-\frac{34}{57}=\frac{23}{57}$$

(e) $P(\text{extrair uma de cada cor})=\dfrac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3}=\dfrac{18}{95}$

(f) $P(\text{de extrair na ordem de 1vermelha, 1 branca e 1 azul})=\dfrac{1}{3!}P(\text{uma de cada cor é extraída})$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{18}{95}\right)=\frac{3}{95},\text{ usando (e)}$$

Outro método

$$\begin{aligned}P(R_1\cap W_2\cap B_3)&=P(R_1)P(W_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1\cap W_2)\\&=\left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{3}{19}\right)\left(\frac{9}{18}\right)=\frac{3}{95}\end{aligned}$$

1.36 No jogo de pôquer, 5 cartas são extraídas de um baralho de 52 cartas bem embaralhadas. Encontre a probabilidade de que (a) 4 são ases, (b) 4 são ases e 1 é rei, (c) 3 são dez e 2 são valetes, (d) um nove, um dez, um valete, uma rainha, um rei são obtidos em qualquer ordem, (e) 3 são de qualquer naipe e 2 são de outro, (f) pelo menos 1 ás é obtido.

(a) $P(\text{4 ases}) = \dfrac{({}_4C_4)({}_{48}C_1)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{1}{54.145}$.

(b) $P(\text{4 ases e 1 rei}) = \dfrac{({}_4C_4)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{1}{649.740}$.

(c) $P(\text{3 são dez e 2 são valetes}) = \dfrac{({}_4C_3)({}_4C_2)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{1}{108.290}$.

(d) $P(\text{nove, dez, valete, rainha, rei em qualquer ordem}) = \dfrac{({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{64}{162.435}$.

(e) $P(\text{3 de qualquer naipe, 2 de outro}) = \dfrac{(4 \cdot {}_{13}C_3)(3 \cdot {}_{13}C_2)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{429}{4165}$,

visto que existem 4 maneiras de escolher o primeiro naipe e 3 maneiras de escolher o segundo naipe.

(f) $P(\text{nenhum ás}) = \dfrac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5} = \dfrac{35.673}{54.145}$. Então, $P(\text{pelo menos um ás}) = 1 - \dfrac{35.673}{54.145} = \dfrac{18.472}{54.145}$.

1.37 Determine a probabilidade de três 6 em 5 lançamentos de um dado honesto.

Considere a representação dos lançamentos do dado pelos 5 espaços – – – – –. Em cada espaço teremos os eventos 6 ou não 6 (6′). Por exemplo, três 6 e dois não 6 podem ocorrer como 6 6 6′ 6 6′ ou 6 6′ 6 6′ 6, etc.

Assim sendo, a probabilidade do resultado 6 6 6′ 6 6′ é:

$$P(6\ 6\ 6'\ 6\ 6') = P(6)\ P(6)\ P(6')\ P(6)\ P(6') = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

desde que presumimos independência. De forma similar,

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

para todos os outros resultados nos quais três 6 e dois não 6 ocorrem. Mas, existem ${}_5C_3 = 10$ resultados e eles são mutuamente exclusivos. Portanto, a probabilidade solicitada é:

$$P(6\ 6\ 6'6\ 6' \text{ ou } 6\ 6'6\ 6'6 \text{ ou} \ldots) = {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

Em geral, se $p = P(A)$ e $q = 1 - p = P(A')$, então, usando o mesmo raciocínio dado acima, a probabilidade de se conseguir exatamente x eventos A em n tentativas independentes é:

$${}_nC_x p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

1.38 Uma estante tem 6 livros de matemática e 4 livros de física. Encontre a probabilidade de que 3 livros de matemática, em particular, estejam juntos.

Todos os livros podem ser dispostos entre eles de ${}_{10}P_{10} = 10!$ maneiras. Vamos presumir que os 3 livros de matemática em particular são, na verdade, substituídos por 1 livro. Então, temos um total de 8 livros que podem ser dispostos entre eles de ${}_8P_8 = 8!$ maneiras. Mas, os 3 livros de matemática podem ser dispostos em ${}_3P_3 = 3!$ maneiras. A probabilidade solicitada é, portanto, dada por:

$$\frac{8!\,3!}{10!} = \frac{1}{15}$$

Problemas variados

1.39 A e B jogam 12 jogos de xadrez, dos quais 6 são vencidos por A, 4 são vencidos por B e 2 terminam empatados. Eles concordam jogar em um torneio, consistindo de 3 jogos. Encontre a probabilidade de que (a) A vença todos os 3 jogos, (b) 2 jogos terminem empatados, (c) A e B vençam alternadamente, (d) B vença pelo menos 1 jogo.

Considere A_1, A_2, A_3 os eventos "A vence" no primeiro, segundo e terceiro jogos, respectivamente, B_1, B_2, B_3, os eventos "B vence" no primeiro, segundo e terceiro jogos, respectivamente. Com base no seu desempenho passado (probabilidade empírica), presumiremos que:

$$P(\text{A vença qualquer jogo}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \qquad P(\text{B vence qualquer jogo}) \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(a) $$P(\text{A vença os 3 jogos}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

supondo que os resultados de cada jogo sejam independentes dos resultados de quaisquer outros. (Essa suposição não seria justificável se cada jogador estivesse *psicologicamente influenciado* pelos ganhos ou perdas do outro jogador.)

(b) Em qualquer jogo a probabilidade de um não empate (isto é, ou A vence ou B vence) é $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ e a probabilidade de um empate é $p = 1 - q = \frac{1}{6}$. Então, a probabilidade de 2 empates e 3 tentativas é (veja o Problema 1.37):

$$\binom{3}{2} p^2 q^{3-2} = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

(c) $$\begin{aligned} P(\text{A e B vencem alternadamente}) &= P(\text{A vence então B vence} \\ &\quad \textit{ou } \text{B vence então A vence então B vence}) \\ &= P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) \\ &= P(A_1)P(B_2)P(A_3) + P(B_1)P(A_2)P(B_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} P(\text{B vence pelo menos um jogo}) &= 1 - P(\text{B não vence nenhum jogo}) \\ &= 1 - P(B_1' \cap B_2' \cap B_3') \\ &= 1 - P(B_1')P(B_2')P(A_3') \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

1.40 A e B jogam um jogo no qual eles alternadamente lançam um par de dados. O primeiro que conseguir um total de 7 vence o jogo. Encontre a probabilidade de que (a) aquele que lançar o dado primeiro vencerá o jogo, (b) aquele que lançar o dado em segundo lugar vencerá o jogo.

(a) A probabilidade de conseguir um 7 em um único lançamento de um par de dados, presumido honesto, é de 1/6, como foi visto no Problema 1.9 e na Fig. 1-9. Se supomos que A é o primeiro a lançar, então A irá vencer em qualquer um dos seguintes casos mutuamente exclusivos com probabilidades associadas indicadas:

(1) A vence no primeiro lançamento. Probabilidade $= \frac{1}{6}$.

(2) A perde no primeiro lançamento, B então perde, A vence. Probabilidade $= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$.

(3) A perde no primeiro lançamento, B perde, A perde, B perde, A vence. Probabilidade $= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$.

. . . .

Então, a probabilidade de que A vença é:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &\qquad = \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots\right] = \frac{1/6}{1 - (5/6)^2} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

onde usamos o resultado 6 do Apêndice A com $x = (5/6)^2$.

(b) A probabilidade de que B vença o jogo é obtida de forma semelhante.

$$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots\right]$$
$$= \frac{5/36}{1 - (5/6)^2} = \frac{5}{11}$$

Portanto, daríamos 6 a 5 chances de que o primeiro a lançar o dado irá vencer. Observe que desde que:

$$\frac{6}{11} + \frac{5}{11} = 1$$

a probabilidade de um empate é zero. Isto não seria verdadeiro se o jogo fosse limitado. Veja o Problema 1.100.

1.41 Uma máquina produz um total de 12000 parafusos por dia que são, em média, 3% defeituosos. Encontre a probabilidade de que de 600 parafusos escolhidos ao acaso, 12 sejam defeituosos.

Dos 12000 parafusos, 3% ou 360, são defeituosos e 11.640 não são. Então:

$$\text{Probabilidade requerida} = \frac{{}_{360}C_{12}\,{}_{11.640}C_{588}}{{}_{12.000}C_{600}}$$

1.42 Uma caixa contém 5 bolas de gude vermelhas e 4 bolas de gude brancas. Duas bolas de gude são extraídas sucessivamente da caixa sem reposição, e é observado que a segunda é branca. Qual é a probabilidade de que a primeira também seja branca?

Método 1

Se W_1, W_2 são os eventos "branca na primeira extração", "branca na segunda extração", respectivamente, estamos procurando por $P(W_1 \mid W_2)$. Essa probabilidade é obtida por:

$$P(W_1 \mid W_2) = \frac{P(W_1 \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{(4/9)(3/8)}{4/9} = \frac{3}{8}$$

Método 2

Visto que sabemos que a segunda é branca, existem somente 3 maneiras das 8 restantes nas quais a primeira extração pode ser branca, portanto a probabilidade é 3/8.

1.43 A probabilidade de que um marido e uma esposa estejam vivos nos próximos 20 anos é dada por 0,8 e 0,9, respectivamente. Encontre a probabilidade de que em 20 anos (a) ambos, (b) nenhum, (c) pelo menos um, estejam vivos.

Considere H e W os eventos de que o marido e esposa, respectivamente, estarão vivos em 20 anos. Então $P(H) = 0{,}8$, $P(W) = 0{,}9$. Suponha que H e W são eventos independentes, que pode ou não ser uma hipótese razoável.

(a) $P(\text{ambos estarem vivos}) = P(H \cap W) = P(H)P(W) = (0{,}8)(0{,}9) = 0{,}72$.

(b) $P(\text{nenhum esteja vivo}) = P(H' \cap W') = P(H')P(W') = (0{,}2)(0{,}1) = 0{,}02$.

(c) $P(\text{pelo menos um esteja vivo}) = 1 - P(\text{nenhum esteja vivo}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

1.44 Uma secretária ineficiente coloca n cartas diferentes em n envelopes diferentes endereçados ao acaso. Encontre a probabilidade de que pelo menos uma das cartas irá chegar ao destino correto.

Considere $A_1, A_2, \ldots A_n$, os eventos de que a 1ª, 2ª,..., enésima carta esteja no envelope correto. Então, o evento de que, pelo menos, uma carta esteja no envelope correto é $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, e queremos encontrar $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$. Para uma generalização dos resultados (10) e (11), página 6, temos:

$$(1) \qquad P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum P(A_k) - \sum P(A_j \cap A_k) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

onde $\sum P(A_k)$ é a soma das probabilidades de A_k de 1 a n, $\sum P(A_j \cap A_k)$ é a soma das probabilidades de $A_j \cap A_k$ com j e k de 1 a n e $k > j$, etc. Temos, por exemplo, o seguinte:

(2) $$P(A_1) = \frac{1}{n} \text{ e de forma similar } P(A_k) = \frac{1}{n}$$

visto que, dos n envelopes, somente 1 terá o endereço apropriado. Também:

(3) $$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

visto que, se a primeira carta está no envelope correto, então somente 1 dos restantes $n - 1$ envelopes estará correto. De uma forma similar encontramos:

(4) $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right)$$

etc. e, finalmente,

(5) $$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) \cdots \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

Agora, na soma $\sum P(A_j \cap A_k)$ existem $\binom{n}{2} = {}_nC_2$ termos, com todos tendo o valor dado por (3). De forma similar em $\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ existem $\binom{n}{3} = {}_nC_2$ termos, com todos tendo o valor dado por (4). Portanto, a probabilidade solicitada é:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) - \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Do cálculo sabemos que (veja o Apêndice A):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

assim, para $x = -1$

$$e^{-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots\right)$$

ou

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots = 1 - e^{-1}$$

Segue que se n é grande, a probabilidade requerida está muito próxima de $1 - e^{-1} = 0{,}6321$. Isto significa que existe uma boa chance de, pelo menos, 1 carta chegar ao destino correto. O resultado é excelente porque a probabilidade permanece praticamente constante para todo $n > 10$. Portanto, a probabilidade de que pelo menos 1 carta irá chegar ao seu destino correto é praticamente a mesma se i é 10 ou 10.000.

1.45 Encontre a probabilidade de que n pessoas ($n \leq 365$) selecionadas aleatoriamente façam os n aniversários em dias diferentes.

Supomos que existam somente 365 dias em um ano, e que todos os aniversários são igualmente prováveis, suposições que não são satisfeitas na realidade.

A primeira das n pessoas faz, é claro, aniversário com probabilidade $365/365 = 1$. Então, se a segunda faz aniversário em um dia diferente, deve ocorrer em um dos outros 364 dias. Portanto, a probabilidade de que a segunda pessoa faça aniversário em um dia diferente da primeira é 364/365. De forma similar, a probabilidade de que a terceira pessoa faça aniversário em um dia diferente dos dois primeiros é 363/365. Finalmente, a probabilidade de que a enésima pessoa faça aniversário em dia diferente dos outros é $(365 - n + 1)$. Portanto, temos:

$$P(\text{todos os } n \text{ aniversários feitos em dias diferentes}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

1.46 Determine quantas pessoas são necessárias no Problema 1.45 para tornar a probabilidade de aniversários em dias diferentes menor do que ½.

Representando a probabilidade solicitada por p e tomando os logaritmos naturais, encontramos:

(1) $$\ln p = \ln\left(1 - \frac{1}{365}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{365}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

Mas, sabemos do cálculo (Apêndice A, fórmula 7) que:

(2) $$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

assim, (1) pode ser escrito:

(3) $$\ln p = -\left[\frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{365}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{(365)^2}\right] - \cdots$$

Usando os fatos que para $n = 2, 3,...$ (Apêndice A, fórmulas 1 e 2)

(4) $$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

obtemos para (3):

(5) $$\ln p = -\frac{n(n-1)}{730} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{12(365)^2} - \cdots$$

Para n pequeno comparado com 365, digamos, $n < 30$, o segundo termo e os termos mais altos à direita de (5) são insignificantes comparados ao primeiro termo, assim que uma boa aproximação neste caso é:

(6) $$\text{In } p = \frac{n(n-1)}{730}$$

Para $p = ½$, $\ln p = -\ln 2 = -0{,}693$. Portanto, temos:

(7) $$\frac{n(n-1)}{730} = 0{,}693 \qquad \text{ou} \qquad n^2 - n - 506 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (n - 23)(n + 22) = 0$$

desta forma $n = 23$. Nossa conclusão, portanto, é que, se n for maior do que 23, podemos atribuir uma probabilidade acima de 50% de que, pelo menos, duas pessoas farão o aniversário no mesmo dia.

Problemas Complementares

Cálculo de probabilidades

1.47 Determine a probabilidade p, ou uma estimativa dela, para cada um dos seguintes eventos:

(a) Um rei, ás, valete de paus ou uma rainha de ouros aparece na extração de uma única carta de um baralho comum bem embaralhado.

(b) A soma 8 aparece em uma única extração de um par de dados honestos.

(c) Um parafuso não defeituoso será encontrado a seguir se de 600 parafusos já examinados, 12 eram defeituosos.

(d) Um 7 ou 11 aparece em um único lançamento de um par de dados honestos.

(e) Pelo menos uma cara aparece em 3 lançamentos de uma moeda honesta.

1.48 Um experimento consiste em retirar 3 cartas em sequência de um baralho comum muito bem embaralhado. Considere A_1 o evento “rei na primeira extração”, A_2 o evento “rei na segunda extração”, A_3 o evento “rei na terceira extração”. Escreva o significado de cada um dos seguintes eventos:

(a) $P(A_1 \cap A_2')$, (b) $P(A_1 \cup A_2)$, (c) $P(A_1' \cup A_2')$, (d) $P(A_1' \cap A_2' \cap A_3')$, (e) $P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_2' \cap A_3)]$.

1.49 Uma bola de gude é extraída ao acaso de uma caixa contendo 10 vermelhas, 30 brancas, 20 azuis e 15 laranjas. Encontre a probabilidade de que ela seja (a) laranja ou vermelha, (b) não vermelha ou azul, (c) não azul, (d) branca, (e) vermelha, branca ou azul.

1.50 Duas bolas de gude são extraídas em sequência da caixa do Problema 1.49, com a reposição sendo feita após cada extração. Encontre a probabilidade de que (a) ambas sejam brancas, (b) a primeira seja vermelha e a segunda branca, (c) nenhuma seja laranja, (d) elas sejam ou vermelhas ou brancas ou ambas (vermelhas e brancas), (e) a segunda seja não azul, (f) a primeira seja laranja, (g) pelo menos uma seja azul, (h) no máximo uma seja vermelha, (i) a primeira seja branca, mas a segunda não, (j) somente uma seja vermelha.

1.51 Refaça o Problema 1.50 sem reposição após cada extração.

Probabilidade condicional e eventos independentes

1.52 Uma caixa contém 2 bolas de gude vermelhas e 3 azuis. Duas são extraídas ao acaso (sem reposição), encontre a probabilidade de que: (a) ambas sejam azuis, (b) ambas sejam vermelhas, (c) uma seja vermelha e uma azul.

1.53 Encontre a probabilidade de se extrair 3 ases ao acaso de um baralho comum de 52 cartas se as cartas são (a) repostas, (b) não repostas.

1.54 Se pelo menos uma criança em uma família com dois filhos é um menino, qual é a probabilidade de que os dois filhos sejam meninos?

1.55 A Caixa *I* contém 3 bolas vermelhas e 5 azuis enquanto que a Caixa *II* contém 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma bola é escolhida ao acaso da primeira caixa e colocada na segunda caixa sem observar a sua cor. Então, uma bola é extraída da segunda caixa. Encontre a probabilidade de que ela seja branca.

Teorema ou regra de Bayes

1.56 Uma caixa contém 3 bolas de gude azuis e 2 vermelhas enquanto que outra caixa contém 2 bolas de gude azuis e 5 vermelhas. Uma bola extraída ao acaso de uma das caixas e se verifica ser azul. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido extraída da primeira caixa?

1.57 Cada uma das três caixas de joias idênticas tem duas gavetas. Em cada gaveta da primeira caixa têm um relógio de ouro. Em cada gaveta da segunda caixa têm um relógio de prata. Em uma gaveta da terceira caixa tem um relógio de ouro enquanto que na outra gaveta tem um relógio de prata. Se selecionarmos uma caixa ao acaso, abrimos uma das gavetas e encontramos um relógio de prata, qual é a probabilidade de que a outra gaveta contenha um relógio de ouro?

1.58 A Urna *I* têm 2 bolas brancas e 3 pretas; a Urna *II*, têm 4 brancas e 1 preta; e a Urna *III*, têm 3 brancas e 4 pretas. Uma urna é selecionada ao acaso e uma bola é extraída ao acaso e se verifica ser branca. Determine a probabilidade de que a Urna *I* tenha sido selecionada.

Análise combinatória, contagem e diagramas de árvore

1.59 Uma moeda é lançada 3 vezes. Utilize um diagrama de árvore para determinar as várias possibilidades que podem surgir.

1.60 Três cartas são retiradas ao acaso (sem reposição) de um baralho comum de 52 cartas. Encontre o número de maneiras na qual alguém possa obter (a) um ouros e um paus e uma copas em sequência, (b) duas copas e, então um paus ou uma espadas.

1.61 De quantas maneiras 3 moedas diferentes podem ser colocadas em duas bolsas?

Permutações

1.62 Avalie (a) ${}_4P_2$, (b) ${}_7P_5$, (c) ${}_{10}P_3$.

1.63 Para qual valor de n temos ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

1.64 De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar em um sofá se existem somente 3 lugares disponíveis?

1.65 De quantas maneiras 7 livros podem ser dispostos em uma estante se (a) qualquer disposição é possível, (b) 3 livros em particular devem estar sempre juntos, (c) dois livros em particular devem ocupar as extremidades?

1.66 Quantos números de cinco algarismos diferentes cada um podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3,..., 9 se (a) os números devem ser ímpares, (b) os primeiros dois dígitos de cada número devem ser pares?

1.67 Solucione o Problema 1.66 se os dígitos podem ser repetidos.

1.68 Quantos números diferentes de três dígitos podem ser formados com 3 quatros, 4 dois e 2 três?

1.69 De quantas maneiras 3 homens e 3 mulheres podem sentar-se em uma mesa redonda se (a) nenhuma restrição é imposta, (b) 2 mulheres em particular não devem sentar juntas, (c) cada mulher deve sentar entre 2 homens?

Combinações

1.70 Avalie (a) ${}_5C_3$, (b) ${}_8C_4$, (c) ${}_{10}C_8$

1.71 Para qual valor de n temos $3 \cdot {}_{n+1}C_3 = 7 \cdot {}_nC_2$

1.72 De quantas maneiras 6 questões podem ser selecionadas de 10?

1.73 Quantos comitês diferentes de 3 homens e 4 mulheres podem ser formados de 8 homens e 6 mulheres?

1.74 De quantas maneiras 2 homens, 4 mulheres, 3 meninos e 3 meninas podem ser selecionados de 6 homens, 8 mulheres, 4 meninos e 5 meninas se (a) nenhuma restrição é imposta, (b) um homem em particular deve ser selecionado?

1.75 De quantas maneiras um grupo de 10 pessoas pode ser dividido em (a) dois grupos consistindo de 7 e 3 pessoas, (b) três grupos consistindo de 5, 3 e 2 pessoas?

1.76 De 5 estatísticos e 6 economistas, um comitê consistindo de 3 estatísticos e 2 economistas deve ser formado. Quantos comitês diferentes podem ser formados se (a) nenhuma restrição é imposta, (b) dois estatísticos, em particular, devem estar no comitê, (c) 1 economista em particular não pode estar no comitê?

1.77 Encontre o número de (a) combinações e (b) permutações de 4 letras que podem ser feitas das letras da palavra *Tennessee*.

Coeficientes binomiais

1.78 Calcule (a) ${}_6C_3$, (b) $\binom{11}{4}$, (c) $({}_8C_2)({}_4C_3)/{}_{12}C_5$.

1.79 Expanda (a) $(x+y)^6$, (b) $(x-y)^4$, (c) $(x-x^{-1})^5$, (d) $(x^2+2)^4$.

1.80 Encontre o coeficiente de x em $\left(x+\frac{2}{x}\right)^9$.

Probabilidade usando análise combinatória

1.81 Encontre a probabilidade de se obter um total de 7 pontos (a) uma vez, (b) pelo menos uma vez e (c) duas vezes, em 2 lançamentos de um par de dados honestos.

1.82 Duas cartas são extraídas sucessivamente de um baralho comum de 52 cartas bem embaralhadas. Encontre a probabilidade de que (a) a primeira carta não seja um dez de paus ou um ás; (b) a primeira carta seja um ás, mas a segunda não; (c) pelo menos uma carta seja do naipe de ouros; (d) as cartas não sejam do mesmo naipe; (e) não mais do que uma carta seja uma carta com uma figura (valete, rainha, rei); (f) a segunda carta não seja uma carta com uma figura; (g) a segunda carta não seja uma carta com uma figura, dado que a primeira era uma carta com uma figura; (h) as cartas são figuras ou espadas ou ambos.

1.83 Uma caixa contém 9 ingressos numerados de 1 a 9. Se 3 ingressos são extraídos da caixa ao mesmo tempo, encontre a probabilidade de que eles tenham números alternativamente ou ímpar, par, ímpar ou então par, ímpar, par.

1.84 As chances a favor de A vencer uma partida de xadrez contra B são 3:2. Se forem jogadas 3 partidas, quais são as chances (a) a favor de A vencer pelo menos 2 das 3 partidas, (b) contra A perder as 2 primeiras partidas para B?

1.85 Em um jogo de *bridge*, cada um dos 4 jogadores recebe 13 cartas de um baralho comum muito bem embaralhado. Encontre a probabilidade de que um dos jogadores (digamos o mais velho) receba (a) 7 ouros, 2 paus, 3 copas e 1 espadas; (b) todos os naipes.

1.86 Uma urna contém 6 bolas de gude vermelhas e 8 azuis. Cinco bolas são extraídas aleatoriamente da urna, sem reposição. Encontre a probabilidade de que 3 sejam vermelhas e 2 sejam azuis.

1.87 (a) Encontre a probabilidade de conseguir uma soma de 7 em pelo menos 1 de 3 lançamentos de um par de dados honestos, (b) Quantos lançamentos são necessários para que a probabilidade em (a) seja maior do que 0,95?

1.88 Três cartas são retiradas de um de um baralho comum de 52 cartas. Encontre a probabilidade de que (a) todas as cartas sejam do mesmo naipe, (b) pelo menos 2 ases sejam retirados.

1.89 Encontre a probabilidade de que um jogador de *bridge* receba 13 cartas das quais 9 sejam do mesmo naipe.

Problemas variados

1.90 Um espaço amostral consiste de 3 pontos amostrais com probabilidades associadas de $2p$, p^2 e $4p - 1$. Encontre o valor de p.

1.91 Quantas palavras podem ser formadas de 5 letras se (a) todas as letras são diferentes, (b) 2 letras são idênticas, (c) todas as letras são diferentes, mas 2 letras em particular não podem ser adjacentes.

1.92 Quatro inteiros são escolhidos ao acaso entre 0 e 9. Encontre a probabilidade de que (a) todos eles sejam diferentes, (b) não mais do que 2 sejam iguais.

1.93 Um par de dados é lançado repetidamente. Encontre a probabilidade de que um 11 ocorra pela primeira vez no sexto lançamento.

1.94 Qual é o número de lançamentos necessários no Problema 1.93 para que a probabilidade de conseguir um 11 seja maior do que (a) 0,50, (b) 0,95?

1.95 Em um jogo de pôquer, encontre a probabilidade de se conseguir (a) uma *sequência real* (*royal flush*), que consiste em dez, valete, rainha, rei e um ás de um único naipe; (b) uma *full house*, que consiste em 3 cartas de um mesmo valor e 2 de outro (como 3 dez e 2 valetes); (c) todas cartas diferentes; (d) 4 ases.

1.96 A probabilidade de que um homem acerte um alvo é de 2/3. Se ele atira no alvo até acertar pelo menos uma vez, encontre a probabilidade de que ele precisará atirar 5 vezes para atingir o alvo pela primeira vez.

1.97 (a) Uma estante contém 6 compartimentos separados. De quantas maneiras 4 bolas de gude indistinguíveis podem ser colocadas nos compartimentos? (b) Resolva o problema se existem n compartimentos e r bolas de gude. Este tipo de problema aparece na física em conexão com a *estatística de Bose-Einstein*.

1.98 Uma estante contém 6 compartimentos separados. De quantas maneiras 12 bolas de gude indistinguíveis podem ser colocadas nos compartimentos de modo que nenhum compartimento fique vazio? (b) Resolva o problema se existem n compartimentos e r bolas de gude onde $r > n$. Este tipo de problema aparece na física em conexão com a *estatística de Fermi-Dirac*.

1.99 Um jogador de pôquer tem as cartas 2, 3, 4, 6, 8. Ele deseja se desfazer do 8 e substituí-lo por outra carta que ele espera ser um 5 (neste caso, ele consegue um "*inside straight*"). Qual é a probabilidade de que ele tenha sucesso, presumindo que os outros três jogadores tenham (a) um 5, (b) dois 5, (c) três 5, (d) nenhum 5? O problema pode ser solucionado se o número de 5 nas mãos dos outros jogadores é desconhecido? Explique.

1.100 Resolva o Problema 1.40 se o jogo for limitado a 3 lançamentos.

1.101 Encontre a probabilidade de que em um jogo de *bridge* (a) 2, (b) 3, (c) todos os jogadores tenham um naipe completo.

Respostas aos Problemas Complementares

1.47 (a) 5/26 (b) 5/36 (c) 0,98 (d) 2/9 (e) 7/8

1.48 (a) Probabilidade de um rei na primeira extração e nenhum rei na segunda extração.

(b) Probabilidade de ou um rei na primeira extração ou um rei na segunda extração ou ambos.

(c) Nenhum rei na primeira extração ou nenhum rei na segunda extração ou ambos (nenhum rei na primeira e segunda extrações).

(d) Nenhum rei na primeira, segunda e terceira extrações.

(e) A probabilidade de ou um rei na primeira extração e um rei na segunda extração ou nenhum rei na segunda extração e um rei na terceira extração.

1.49 (a) 1/3 (b) 3/5 (c) 11/15 (d) 2/5 (e) 4/5

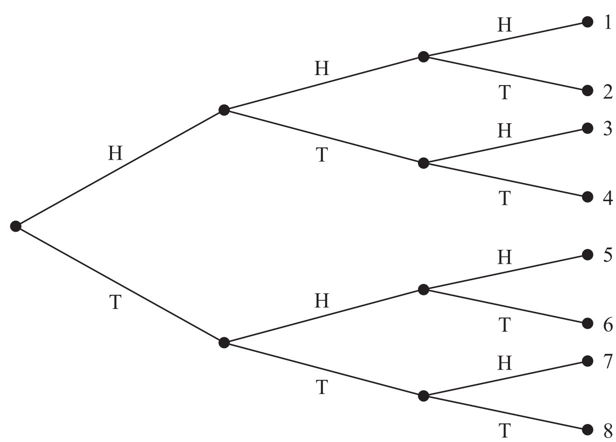
1.50 (a) 4/25 (b) 4/75 (c) 16/25 (d) 64/225 (e) 11/15 (f) 1/5 (g) 104/225 (h) 221/225 (i) 6/25 (j) 52/225

1.51 (a) 29/185 (b) 2/37 (c) 118/185 (d) 52/185 (e) 11/15 (f) 1/5 (g) 86/185 (h) 182/185 (i) 9/37 (j) 26/111

1.52 (a) 3/10 (b) 1/10 (c) 3/5 **1.53** (a) 1/2197 (b) 1/17.576

1.54 1/3 **1.55** 21/56 **1.56** 21/31 **1.57** 1/3 **1.58** 14/57

1.59



1.60 (a) 13 × 13 × 13 (b) 13 × 12 × 26 **1.61** 8 **1.62** (a) 12 (b) 2520 (c) 720

1.63 $n = 5$ **1.64** 60 **1.65** (a) 5040 (b) 720 (c) 240 **1.66** (a) 8400 (b) 2520

1.67 (a) 32.805 (b) 11.664 **1.68** 26 **1.69** (a) 120 (b) 72 (c) 12

1.70 (a) 10 (b) 70 (c) 45 **1.71** $n = 6$ **1.72** 210 **1.73** 840

1.74 (a) 42.000 (b) 7000 **1.75** (a) 120 (b) 2520 **1.76** (a) 150 (b) 45 (c) 100

1.77 (a) 17 (b) 163 **1.78** (a) 20 (b) 330 (c) 14/99

1.79 (a) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^3 + 6xy^5 + y^6$

(b) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

(c) $x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5}$

(d) $x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16$

1.80 2016 **1.81** (a) 5/18 (b) 11/36 (c) 1/36

1.82 (a) 47/52 (b) 16/221 (c) 15/34 (d) 13/17 (e) 210/221 (f) 10/13 (g) 40/51 (h) 77/442

1.83 5/18 **1.84** (a) 81 : 44 (b) 21 : 4

1.85 (a) $({}_{13}C_7)({}_{13}C_2)({}_{13}C_3)({}_{13}C_1)/{}_{52}C_{13}$ (b) $4/{}_{52}C_{13}$ **1.86** (a) $({}_6C_3)({}_8C_2)/{}_{14}C_5$

1.87 (a) 91/216 (b) pelo menos 17 **1.88** (a) $4 \cdot {}_{13}C_{3//52}C_3$ (b) $({}_4C_2 \cdot {}_{48}C_1 + {}_4C_3)/{}_{52}C_3$

1.89 $4({}_{13}C_9)({}_{39}C_4)/{}_{52}C_{13}$ **1.90** $\sqrt{11} - 3$ **1.91** (a) 120 (b) 60 (c) 72

1.92 (a) 63/125 (b) 963/1000 **1.93** (a) 1.419.857/34.012.224 **1.94** (a) 13 (b) 53

1.95 (a) $4/{}_{52}C_5$ (b) $(13)(2)(4)(6)/{}_{52}C_5$ (c) $4^5({}_{13}C_5)/{}_{52}C_5$ (d) (5)(4)(3)(2)/(52)(51)(50)(49)

1.96 2/243 **1.97** (a) 126 (b) ${}_{n+r-1}C_{n-1}$ **1.98** (a) 462 (b) ${}_{r-1}C_{n-1}$

1.99 (a) 3/32 (b) 1/16 (c) 1/32 (d) 1/8

1.100 probabilidade de A vencer = 61/216, probabilidade de B vencer = 5/36, probabilidade de empate = 125/216

1.101 (a) $12/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})$ (b) $24/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})({}_{26}C_{13})$