

# Na vida dez, na escola zero



EDITORA AFILIADA

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Carraher, Terezinha Nunes

Na vida dez, na escola zero / Terezinha Nunes, David Carraher, Analucia Schlemann. – 16. ed. – São Paulo : Cortez, 2011.

Bibliografia.

ISBN 978-85-249-1801-8

1. Matemática – Aspectos psicológicos 2. Matemática – Estudo e ensino  
I. Carraher, David. II. Schliemann, Analucia. III. Título.

11-07282

CDD-370.156  
-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Aprendizagem em matemática : Psicologia educacional 370.156
2. Matemática : Aspectos psicológicos : Educação 370.156
3. Matemática : Ensino 510.7

Terezinha Nunes  
David Carraher • Analúcia Schliemann

# Na vida dez, na escola zero

16ª edição  
— 2011 —  
4ª reimpressão

 **CORTEZ**  
**EDITORA**

NA VIDA DEZ, NA ESCOLA ZERO

Terezinha Nunes • David Carraher • Analucia Schliemann

*Capa:* Cia. de Desenho

*Preparação de originais:* Solange Martins

*Revisão:* Maria de Lourdes de Almeida

*Composição:* Linea Editora Ltda.

*Coordenação editorial:* Danilo A. Q. Morales

Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou duplicada  
sem autorização expressa dos autores e do editor

© 2011 by Autores

Direitos para esta edição

CORTEZ EDITORA

Rua Monte Alegre, 1074 – Perdizes

05014-001 – São Paulo – SP

Tel.: (11) 3864-0111 Fax: (11) 3864-4290

e-mail: [cortez@cortezeditora.com.br](mailto:cortez@cortezeditora.com.br)

[www.cortezeditora.com.br](http://www.cortezeditora.com.br)

Impresso na Índia — janeiro de 2015

## Sumário

<b>Apresentação à 16<sup>a</sup> edição</b> .....	7
<b>Capítulo 1</b> A matemática na vida cotidiana: psicologia, matemática e educação .....	27
<b>Capítulo 2</b> Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática <i>Terezinha Nunes, David W. Carraher e Analúcia D. Schliemann</i> .....	41
<b>Capítulo 3</b> Matemática escrita <i>versus</i> matemática oral <i>Terezinha Nunes, David W. Carraher e Analúcia D. Schliemann</i> .....	65
<b>Capítulo 4</b> Escolarização formal <i>versus</i> experiência prática na resolução de problemas <i>Analúcia D. Schliemann</i> .....	89
<b>Capítulo 5</b> A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária <i>Analúcia D. Schliemann</i> .....	107

<b>Capítulo 6</b>	Passando da planta para a construção: um trabalho de mestres <i>Terezinha Nunes</i> .....	123
<b>Capítulo 7</b>	Álgebra na feira? <i>Terezinha Nunes e Analúcia D. Schliemann</i> .....	149
<b>Capítulo 8</b>	Cultura, aritmética e modelos matemáticos .....	165
<b>Conclusões</b>	.....	189
<b>Sobre os autores</b>	.....	207

## Apresentação à 16<sup>a</sup> edição

Nesta apresentação da nova edição de *Na vida dez, na escola zero*, considero o impacto desses estudos ao longo dos vinte e tantos anos desde sua primeira edição e levanto questões que ainda estão por estudar. Espero que essas questões sirvam de inspiração para pesquisadores jovens, interessados na Matemática da vida. A publicação original desta coletânea de estudos foi em português; posteriormente, o livro foi traduzido para o espanhol, e uma versão ampliada apareceu em 1993, em inglês, com o título *Street Mathematics, School Mathematics*. Embora seja possível usar dados quantitativos para avaliar o impacto desses estudos, como o número de citações de diversas das nossas publicações, principalmente das publicações em inglês, esses dados não contarão a história do impacto dos resultados relatados neste livro, nem o pensamento dos pesquisadores interessados na cognição e na educação matemática, entre os quais me incluo, nem o modo de pensar dos professores em relação a seus alunos.

Nossas inquietações iniciais estão bem descritas no livro.<sup>1</sup> Buscávamos, naquela época, uma forma de entender a diferença entre as

---

1. Nesta apresentação, uso o plural quando me refiro aos trabalhos descritos neste livro e o singular quando me refiro às minhas reflexões posteriores, que não são necessariamente compartilhadas por David e Analúcia. Eles não são, portanto, responsáveis pelo conteúdo dessa apresentação. Agradeço a ambos a contribuição enviada como descrição do impacto desses estudos sobre seus trabalhos atuais, que aparece na apresentação do tema da Matemática da vida à Álgebra.

habilidades matemáticas claramente demonstradas por jovens da camada popular em suas atividades diárias e seu aparente fracasso na escola. Buscávamos métodos de investigação que nos ajudassem a descrever essa situação, bem como teorias que nos ajudassem a compreendê-la. Gostaríamos de ter algo a dizer aos pesquisadores e, especialmente, aos professores e aos planejadores do currículo e da educação em geral, mas não sabíamos ainda o que queríamos dizer. Lembro-me de uma frase que o professor Ubiratan D'Ambrosio me disse naquela época, uma frase de um poeta, cujo nome não me lembro mais, a qual me fez, e ainda faz, pensar: o caminho se faz ao caminhar. Depois de tanto caminhar, ousou olhar para trás e refletir sobre o caminho traçado desde a publicação destes estudos, e organizo estas reflexões em temas.

## Quantidades e números

A diferença entre quantidades e números é um tema que exploramos repetidamente na comparação entre a Matemática na rua e na escola. Os números são usados para representar quantidades — por exemplo, na expressão “cinco abacates”, o número cinco representa a quantidade de abacates. Mas podemos pensar sobre quantidades sem usar números: por exemplo, se Paulo é maior do que João e João é maior do que Pedro, podemos concluir que Paulo é maior do que Pedro, sem saber qual é a altura de cada um.

Existem ocasiões em que podemos usar nosso raciocínio sobre quantidades para verificar se nossas operações com números estão corretas. Ronaldo, cujo raciocínio descrevemos no capítulo 3, fez exatamente isso. Ao subtrair 35 de 200, Ronaldo obteve inicialmente o resultado 200. Quando lhe perguntamos se estava certa sua conta, ele não hesitou: “*Não. Então você compra uma coisa, e ela custa trinta e cinco, você paga com uma nota de duzentos, e eu lhe devolvo os duzentos?*” Creio que a maioria dos professores gostaria que seus alunos tivessem o bom-senso de Ronaldo: ao terminar de fazer uma conta, refletissem sobre as quantidades no problema para avaliar a solução. Um bom-sen-

so sobre as relações entre quantidades pode ajudar muito na resolução de problemas.

No entanto, os números têm significado independentemente de representarem quantidades específicas, simplesmente em consequência de sua definição no sistema numérico do qual fazem parte. Cinco é um número maior do que dois, independentemente de seu uso para representar uma quantidade de frutas, ou dinheiro ou o tamanho de objetos em centímetros. Cinco é um número maior do que dois devido à sua posição no sistema de contagem. O significado dos números, quando considerados sem referência a quantidades, é dado pelo sistema de numeração, que é convencional. Em português o número cinco tem, por definição, alguns significados: por exemplo, é igual a  $4 + 1$ , ou  $3 + 2$ . Esse significado é convencional, mas não é arbitrário: cinco é igual a  $4 + 1$  porque o número cinco no sistema de contagem é o primeiro depois do quatro, e é igual a  $3 + 2$  porque vem dois lugares depois do número três.

Nossos estudos da Matemática na vida diária se referem a números que representam quantidades. Por isso Ronaldo e tantos outros dos participantes de nossos estudos puderam verificar se fizeram a conta certa raciocinando sobre quantidades. O que os estudos sugerem é que os alunos que aprendem Matemática informalmente, na prática de atividades diversas, têm uma excelente habilidade ao pensar sobre quantidades. Essa habilidade poderia ser aproveitada na sala de aula, mas algumas vezes temos dificuldade em perceber sua existência porque esperamos que os alunos só saibam pensar sobre quantidades se souberem pensar sobre números. Devido a essa expectativa, não lhes damos a oportunidade de demonstrar seu conhecimento matemático.

Para alguns, essa questão poderia ser vista como a pergunta: o que vem primeiro, o ovo ou a galinha? Para representar quantidades, usamos números, e para entender os números, precisamos pensar sobre quantidades. O que vem primeiro? Diferentemente do ovo e da galinha, as ideias iniciais de quantidade se desenvolvem primeiro, mas, ao aprender mais sobre números, as crianças ampliam sua compreensão de quantidades. Nossos estudos certamente mostraram que as crianças e adultos

que aprenderam Matemática fora da escola tinham uma excelente compreensão de quantidades e que as representavam por números sem nenhuma dificuldade. No entanto, ao tentar manipular números sem fazer referência a quantidades, essas crianças nem sempre tinham o mesmo grau de sucesso, e ainda deveriam melhorar sua compreensão dos números e das relações entre eles.

Estudos feitos por Martin Hughes convergem com nossos resultados. Hughes (1981) perguntou a crianças de três e de quatro anos de idade: “*Se eu colocasse um tijolinho nessa caixa, e depois colocasse dois tijolinhos, quantos tijolinhos haveria dentro da caixa?*” Embora as crianças fossem tão novinhas, e não tivessem aprendido a fazer conta na escola, aproximadamente um terço delas (35%) respondeu corretamente. Em contraste, quando ele perguntou às mesmas crianças “*Quanto é um mais dois?*”, uma percentagem bem menor (8%) foi capaz de responder corretamente. Em um trabalho recente discutimos a questão da diferença entre números e quantidades e a origem da compreensão de números, num nível de detalhe que não pode ser apresentado aqui (disponível em: <[www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P1.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P1.pdf)> e <[www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P2.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P2.pdf)>), mas que talvez seja de interesse para o leitor.

A necessidade de se distinguir entre quantidades e números tem recebido progressivamente mais atenção entre pesquisadores em educação matemática (ver, por exemplo, Nunes et al., 2011; Thompson, 1993). A interpretação do que significa essa diferença entre compreender quantidades e compreender números difere nas várias teorias sobre a origem da compreensão dos números. Porém, embora não exista consenso quanto à explicação da compreensão dos números, existe uma convergência de resultados que não pode ser negada: a compreensão das quantidades precede a compreensão dos números.

O significado desses resultados é explorado na sala de aula pelos pesquisadores do Instituto Freudenthal, que sugerem que o ensino da Matemática no nível fundamental deve ser feito a partir da compreensão das quantidades que a criança vai desenvolvendo, espontaneamente ou em virtude do ensino na escola. O programa de ensino de vários conceitos, proposto pelos pesquisadores do Instituto Freudenthal, segue

sempre a mesma linha: os alunos são estimulados a refletir sobre quantidades e a representá-las usando números. À medida que progredem em suas reflexões, o significado dos números vai se tornando mais claro. As propostas de Gravemeijer (1990; 1997) e Streefland (1985; 1997) sobre o ensino da divisão, das frações e das proporções seguem claramente essas direções. Os trabalhos de Gravemeijer e Streefland não são uma consequência de nossos estudos; foram inspirados nas ideias de Freudenthal. Mas os estudos sobre a Matemática da vida feitos no Brasil e as propostas de ensino desses pesquisadores estão em sintonia e reforçaram-se mutuamente ao longo das décadas de 1980 e 1990.

Nos programas de ensino criados no Instituto Freudenthal, o desenvolvimento da compreensão dos números não termina com a análise das relações entre quantidades. A resolução de problemas sobre quantidades deve ser complementada por explorações de diagramas, gráficos e outras representações que permitam aos alunos discutir as relações entre números. Nossos estudos sobre a Matemática na vida diária não investigaram situações em que as relações entre números são analisadas, independentemente de quantidades. Seria interessante investigar se essas situações existem e o que os jovens e adultos aprendem a partir delas no dia a dia. Estudamos, por exemplo, o raciocínio de mestres de obras ao resolverem problemas sobre escalas mas não investigamos se o uso constante que fazem da trena tem alguma repercussão sobre sua compreensão de número.

A trena pode ser concebida como um instrumento de medida mas também como um modelo das relações entre números. Em colaboração com colegas ingleses (Nunes et al. 1993; 1995), tive a oportunidade de estudar as dificuldades de alunos do ensino fundamental em compreender as características da régua como representação numérica. Por exemplo, a contagem de objetos se faz a partir do número um, mas a régua começa a partir do zero; isso significa que há *insights* sobre números que poderiam ser facilitados pelo uso constante de instrumentos de medida linear na vida diária. Para os alunos, coordenar seu conhecimento de contagem com a régua não é uma questão trivial. Quando mostramos aos alunos uma figura de uma régua desenhada no papel e lhes pedimos que inserissem os números no desenho, exatamente como

eles existem na régua, uma percentagem significativa não usou o zero, escrevendo o número um na posição normalmente ocupada pelo zero. Além disso, quando pedimos aos alunos que medissem fitas usando uma régua quebrada, que começava no número quatro, muitos alunos não perceberam que a relação entre o número na régua e a quantidade era problemática e liam o resultado sem se lembrar de que do valor lido deveriam subtrair quatro. Essas observações sugerem que a diferença entre contagem e representação numérica numa reta é problemática.

Infelizmente, nossos estudos da Matemática na vida diária não nos permitem dizer como essa diferença é concebida na prática ou se ela causa alguma dificuldade aos aprendizes de uma profissão em que a trena é um instrumento usado no dia a dia. Seria útil saber se a utilização constante de um instrumento que representa as relações numéricas e usa o zero, bem como representa divisões da unidade, tem alguma repercussão sobre a compreensão de relações numéricas dos usuários. Sem ter feito os estudos relevantes, minha hipótese é de que o uso constante da trena pode, de fato, melhorar a compreensão de inteiros e decimais dos usuários, mas estes precisam inicialmente resolver o problema da diferença entre contagem e representação da sequência numérica numa reta. Esse é um tema que mereceria investigação e que ainda está por estudar. A criatividade dos investigadores interessados nesse tema será necessária para que se apresente aos participantes situações que promovam o raciocínio e não sejam resolvidas por meio de rotinas. As conclusões de um estudo sobre essa questão poderiam inspirar professores que utilizam a reta numérica como representação das relações numéricas, tanto para inteiros como para frações decimais.

## **O raciocínio multiplicativo não pode ser reduzido a adições repetidas**

Levei muitos anos para compreender as lições contidas em nossos estudos sobre a construção do raciocínio multiplicativo e a compreen-

são das proporções quando esses conceitos são aprendidos na prática. Em *Na vida dez, na escola zero*, a interpretação desse processo de construção existe apenas em forma embrionária. Analisamos cuidadosamente as transcrições de como as crianças e os adultos calculavam o resultado de multiplicações e divisões, e descrevemos seu procedimento como a heurística dos agrupamentos repetidos. José Geraldo, por exemplo, numa situação de venda, precisou resolver quanto dá  $15 \times 50$ , e o fez assim:

*“Cinquenta, cem, cento e cinquenta, duzentos, duzentos e cinquenta. (Enquanto dizia esses números, a criança marcava nos dedos de uma mão quantos cinquenta já haviam sido somados. Ao completar essa mão, ela continuou) Duzentos e cinquenta. Quinhentos. Quinhentos e cinquenta, seiscentos, seiscentos e cinquenta, setecentos, setecentos e cinquenta”.*

Nossa interpretação dessa solução do problema focalizou o fato de que José Geraldo construiu um primeiro agrupamento, com cinco cinquenta, repetiu esse agrupamento, formando dez cinquenta, e depois chegou aos quinze cinquenta adicionando cada cinquenta individualmente. Apontamos que cada dedo correspondia a um valor determinado pelos agrupamentos. Denominamos essa forma de encontrar o resultado de uma multiplicação como heurística, uma vez que não são seguidos passos previamente determinados, porque as crianças utilizam diferentes agrupamentos dependendo dos valores usados no problema. Outra criança, entrevistada na feira, vendia os limões a dois e cinquenta. Perguntamos qual era o preço de seis limões. O agrupamento repetido aqui foi: *“Quatro limões é dez e dois limões é 5. Então são quinze cruzeiros”.*

Nossa análise naquele momento focalizou os princípios implicitamente aceitos como válidos pelos participantes ao solucionar as contas, que são denominados por Vergnaud (2009) “teoremas em ação”. Nosso ponto de vista, o qual ainda é inteiramente válido, era que essas crianças demonstravam compreender a ideia de que a multiplicação é distributiva em relação à adição, uma vez que essa compreensão estava implícita na maneira como resolviam as contas. Essa é uma observação

muito importante pois, como argumentamos, esse mesmo princípio é usado implicitamente na resolução de contas de multiplicar resolvidas pelo algoritmo ensinado na escola. De fato, na escola também fazemos a multiplicação por partes, e somamos os resultados parciais para chegar ao final. Por exemplo, quando multiplicamos 50 por 25, primeiro calculamos  $50 \times 5$ , depois  $50 \times 20$ , e em seguida adicionamos os dois resultados parciais.

Essa análise é perfeitamente válida e tem implicações educacionais importantes para o ensino da multiplicação, exploradas cuidadosamente no original. Mas somente mais tarde cheguei a compreender que ainda havia algo muito importante no comportamento das crianças e dos adultos quando resolviam esses problemas. Em alguns casos, chamamos as questões de problemas de multiplicação porque o preço da unidade (um limão custa dois e cinquenta) era conhecido de antemão. Outros problemas foram identificados como problemas de proporção, porque o valor unitário não era conhecido. Por exemplo, um dos problemas apresentados aos mestres de obra foi calcular o tamanho de uma parede a partir de sua medida na planta (8 cm), sabendo que outra parede de 2 metros media 5 cm na planta. Nesse caso, a escala usada no desenho não constitui um exemplo das escalas normalmente usadas, e o valor unitário não é apresentado. Um mestre de obras sem escolaridade resolveu a questão, explicando pacientemente para que eu pudesse compreender: *“Uma coisa eu tenho que explicar pra senhora. Essa não é uma escala que a gente trabalha com ela na construção. Essa a gente tem que dividir. Vamos pegar cinco centímetros aqui e aqui é dois metros. Eu acho que esse a senhora fez de propósito. Eu não acho que eles iam desenhar uma planta assim. [...] Um metro vale dois centímetros e meio. Aqui (na planta) está mostrando oito centímetros. Um metro, dois centímetros e meio. Dois metros, cinco centímetros (marcando os centímetros na trena ao mesmo tempo em que conta os metros correspondentes; a trena está colocada sobre a planta.) Três metros, sete e meio centímetros. Agora vinte e cinco dividido por cinco. [...] Se eu tenho, se eu tenho dois centímetros e meio valendo um metro, esse (mostra 5 mm) é esse (mostra 2,5 cm) dividido por cinco. Então é vinte centímetros de parede, aí eu somo, é três metros e vinte”*.

O que me escapou naquela época foi a implicação dessas soluções com relação à origem do raciocínio multiplicativo, revelada nos comportamentos descritos acima. Ao solucionar os problemas, tanto as crianças como os adultos consistentemente estabeleciam correspondências entre as duas medidas (ou, de modo mais amplo, as duas variáveis) no problema. Alguns anos depois, ao reler inúmeras vezes as transcrições dessas soluções, compreendi o significado desse comportamento: a origem do raciocínio multiplicativo está no esquema de ação de correspondências. Esse *insight* levou-me a fazer inúmeras pesquisas com crianças que ainda não haviam aprendido a fazer conta de multiplicar e dividir na escola. Se a hipótese de que a origem do raciocínio multiplicativo está no esquema de correspondência, deveríamos encontrar um nível relativamente bom de sucesso em problemas multiplicativos entre crianças que ainda não tenham recebido instrução escolar mas sejam capazes de usar o esquema de correspondência. Segundo Piaget (1952), muitas crianças de cinco e seis anos já sabem estabelecer correspondências um-a-muitos e fazer inferências numéricas a partir dessas correspondências.

Essa hipótese levou à realização de muitos trabalhos, que foram relatados inicialmente em *Crianças fazendo Matemática* (Nunes e Bryant, 1996). O que observamos nesses estudos foi que, de fato, há uma percentagem significativa de crianças de cinco ou seis anos que resolve problemas de raciocínio multiplicativo corretamente, embora ainda não tenham aprendido a fazer conta de multiplicar ou de dividir. Vejamos um exemplo: em um dos estudos, demos às crianças objetos e figuras recortadas que elas podiam usar para auxiliá-las na solução. O problema era: Numa rua há três casinhas e em cada casinha moram quatro coelhos. Nós vamos colocar um bolinho de cenoura para cada coelho comer. Essas fichinhas são bolinhos de faz de conta. Coloque na caixa o número certo de bolinhos para que cada coelho que mora nessa rua ganhe um bolinho. O índice de respostas corretas entre as crianças de 5 anos foi 67%; todas as crianças de seis anos pegaram o número certo de fichas. As crianças que responderam corretamente invariavelmente usavam o esquema de correspondência: por exemplo, apontavam para cada casinha e contavam quatro bolinhos, ou colocavam os bolinhos diretamen-

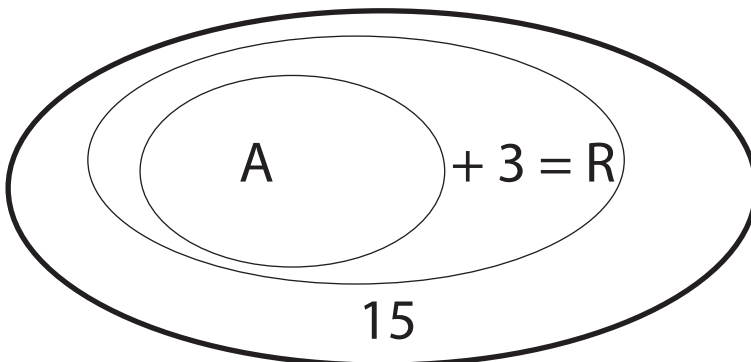
te em correspondência com as casas. Esse índice de sucesso na resolução de problemas que dependem do raciocínio multiplicativo entre crianças que não aprenderam a fazer conta de multiplicar e o uso das correspondência em ação como estratégia de resolução sugerem que a origem do raciocínio multiplicativo está no esquema de correspondência.

Isso significa que o raciocínio multiplicativo não tem origem na adição repetida, porque a adição usa o esquema de juntar, e não o esquema de correspondência. Duas publicações recentes fazem uma revisão desses estudos, incluindo resultados publicados em *Na vida dez, na escola zero*: Nunes et al., 2010, e Nunes e Bryant, 2010.

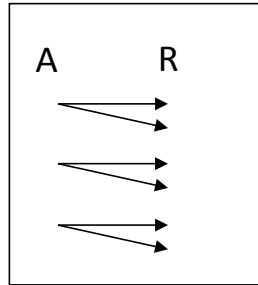
Gostaria de salientar que as relações entre quantidades em problemas aditivos e em problemas multiplicativos são claramente distintas. O diagrama 1 ilustra essa diferença. No primeiro problema, a lógica que usamos para representar a relação entre as quantidades é ligada às relações parte-todo. No segundo problema, a lógica que usamos é ligada à correspondência.

- Relações aditivas

- Rui e Ana tem juntos 15 livros (quantidade)
- Rui tem 3 livros a mais do que Ana (ou Ana tem 3 livros a menos do que Rui) (relação)
- Quantos livros cada um tem?



- Relações multiplicativas
  - Rui e Ana tem juntos 15 livros (quantidade)
  - Rui tem o dobro de livros que a Ana tem (ou Ana tem metade dos livros que o Rui tem) (relação)
  - Quantos livros cada um tem?



A hipótese de que o raciocínio multiplicativo não tem origem em adições repetidas tem provocado um debate interessante no campo da educação matemática. Por um lado, vários pesquisadores em educação matemática (*e.g.* Harel e Confrey, 1994) e matemáticos que não estão diretamente ligados à pesquisa em educação (*e.g.* Devlin, 2009) compartilham essa ideia com entusiasmo. Por outro lado, há um inegável comprometimento de vários pesquisadores e professores com a ideia de que a multiplicação é apenas uma questão da adição repetida de parcelas iguais, uma vez que essa ideia é antiga e usada há muito tempo no ensino. Em minha opinião, a evidência em favor da tese de que a origem do raciocínio multiplicativo está no esquema de correspondência é robusta, mas não creio que os que apoiam a ideia de que a multiplicação é apenas a adição repetida de parcelas iguais estejam prontos a reconhecer que é tempo de mudar. Esse debate precisa, porém, ser ativamente incluído na pauta dos responsáveis pelos programas, currículos e livros didáticos no Brasil. Seria embaraçoso para os educadores brasileiros que um debate internacional significativo para a educação, iniciado por estudos feitos no Brasil, não tivesse repercussão entre nós.

## O ensino de Matemática como a apropriação de modelos de pensamento

Uma terceira contribuição dos estudos relatados em *Na vida dez, na escola zero* é a ideia de que aprender Matemática não é simplesmente, e nem principalmente, aprender a fazer contas. Essa ideia é claramente explorada no capítulo 8, em que argumentamos que aqueles que aprendem a Matemática na vida diária aprendem principalmente modelos matemáticos, e por isso não confundem o raciocínio aditivo com o raciocínio multiplicativo quando resolvem problemas. Os estudos relatados nos Capítulos 4 e 8 mostram que os estudantes brasileiros têm dificuldades em escolher a operação certa para solucionar problemas e interpretar os resultados, porém isso não aconteceu nem com os marceneiros nem com os mestres de obra, que haviam aprendido os modelos matemáticos em sua prática diária.

Devo salientar que esse não é um problema específico dos estudantes brasileiros. A pesquisadora inglesa Kathleen Hart apresentou a uma amostra considerável de estudantes ingleses o seguinte problema sobre dois personagens de livro: “O sr. Baixinho tem um amigo, o sr. Grandão. Quando medimos os dois com palitos de fósforo, vemos que o sr. Baixinho mede 4 palitos e o sr. Grandão mede 6. Quando medimos o sr. Baixinho com clipes, vemos que o sr. Baixinho mede 6 clipes. Qual será a altura do sr. Grandão medida em clipes?” Para facilitar a compreensão do problema, Hart (1984) incluiu também um diagrama no qual estava desenhado o sr. Baixinho e apareciam 6 clipes mostrando sua altura. Hart apresentou esse problema a mais de 2.200 alunos que estavam na faixa etária de 12 a 15 anos e já tinham aprendido a multiplicar e dividir, como também tinham recebido instrução na regra de três. No entanto, o índice de acerto foi bem baixo: 28% entre os alunos na faixa de 12 a 13 anos e 42% entre os alunos na faixa de 14 a 15 anos. A resposta mais frequente entre os alunos de 12 a 14 anos (51% dos alunos) foi que a altura do sr. Grandão era 8 clipes, resposta obtida encontrando-se a diferença entre as duas medidas em palitos de fósforo e usando essa mesma diferença para calcular a altu-

ra em cliques. Entre os alunos na faixa de 14 a 15 anos, essa solução por raciocínio aditivo ainda foi muito comum: 39% dos alunos responderam que o sr. Grandão media 8 cliques. Portanto, os resultados com estudantes brasileiros são semelhantes a resultados observados com estudantes ingleses.

Esse é um problema de escala semelhante aos que apresentamos aos mestres de obras: quando o sr. Baixinho é medido com palitos de fósforo, sua altura é 4; quando ele é medido com cliques, sua altura é 6. Quando o sr. Grandão é medido com palitos de fósforo, sua altura é 6; qual seria sua altura se fôssemos medi-lo com cliques? Não sei como nossos mestres de obra teriam respondido essa questão, mas seria interessante saber. Uma observação deve ser feita quanto à forma como o problema foi apresentado aos alunos: as correspondências enfatizadas na apresentação do problema foram entre as medidas dos dois personagens, e não entre as duas escalas, o que poderia ter levado os alunos a não atentarem para o problema como uma questão de conversão de escalas. Portanto, há alguns pontos a serem esclarecidos na interpretação dos resultados obtidos por Hart, e seria interessante explorar essa questão no Brasil, tanto com pessoas com experiência no uso de escalas quanto com jovens estudantes.

A apropriação de modelos matemáticos por jovens e adultos que aprendem a Matemática na vida diária mostra, consistentemente, que o problema de escolher a operação correta, tão comum entre estudantes, não aparece entre esses jovens e adultos quando eles usam seus conhecimentos diários. Em contraste, quando os estudantes constroem sua compreensão dos modelos matemáticos na sala de aula, essa construção depende das experiências práticas que a escola lhes proporciona. Quando ensinamos a multiplicação como adição repetida, essa experiência talvez torne mais difícil para os alunos diferenciar o raciocínio aditivo do raciocínio multiplicativo.

A compreensão da relação entre problemas e modelos matemáticos é um tema de grande importância para a educação matemática. Fischbein e seus colaboradores (Fischbein, 1987; Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985) consideram fundamental para a compreensão do

raciocínio dos alunos sabermos em que experiências esse raciocínio se baseia. Por exemplo, quando os alunos baseiam sua compreensão da multiplicação na ideia de adições repetidas, eles concluem que a multiplicação de números positivos sempre resulta num valor maior. Quando os alunos encontram a multiplicação de um inteiro por uma fração decimal — por exemplo:  $0,5 \times 10$  —, não conseguem compreender como é possível que o número fique menor depois de uma multiplicação. Similarmente, quando os alunos desenvolvem sua compreensão de divisão principalmente em situações de distribuir quantidades maiores em grupos menores — por exemplo, distribuir 15 doces para 3 crianças — eles formam um conceito restrito de divisão. Ao encontrarem um problema em que uma quantidade menor deve ser dividida por uma maior, eles simplesmente trocam o dividendo com o divisor, e fazem a conta errada: por exemplo, no problema “15 amigos decidiram dividir igualmente 5 quilos de biscoito; quanto cada um vai ganhar?”, a operação indicada por muitos alunos como a que se deve fazer para resolver o problema é 15 dividido por 5, em vez de 5 dividido por 15. Esse erro pode ser observado mesmo entre estudantes que já completaram o ensino fundamental (Graeber e Tirosh, 1988), os quais justificam sua resposta dizendo que na divisão o número maior é dividido pelo menor.

Portanto, a lição aprendida com os estudos relatados neste livro é de extrema importância: as experiências que levam à construção de modelos matemáticos adequados para se pensar sobre situações são fundamentais para a construção do conhecimento matemático. Os mestres de obras, bem como outros trabalhadores quem usam o raciocínio multiplicativo na vida diária, não confundem o raciocínio multiplicativo com o aditivo em sua prática. Seria essencial que, na escola, encontrássemos modelos adequados para ensinar as diferentes formas de relações entre quantidades (ou medidas ou variáveis).

Creio que as situações de divisão de um número menor por um maior proporcionam uma boa introdução ao conceito de frações, mas não estudamos essas situações na vida diária, entre jovens e adultos que lidem com elas regularmente. Já existem alguns estudos no Brasil sobre as frações e situações como essas, mas não conheço ainda nenhum que

tenha aproveitado situações relacionadas a práticas profissionais. Teríamos muito que aprender a partir de estudos sobre frações na vida diária.

## Da Matemática da vida à Álgebra

Entre os estudos relatados em *Na vida dez, na escola zero*, há um que denominamos Álgebra na feira. Nossa definição do problema como do tipo que requer raciocínio algébrico apoiou-se no fato de que os problemas envolviam uma incógnita nos dois lados de uma equivalência. Os problemas foram apresentados usando desenhos, e basicamente envolviam o cálculo do peso de pacotes colocados em uma balança de dois pratos, junto com alguns pesos. Por exemplo, um problema apresentava em um lado da balança um peso de 750 gramas e um pacote, cujo peso devia ser calculado; do outro lado da balança estavam dois pacotes iguais ao primeiro e mais um peso de meio quilo. Portanto, havia pacotes de pesos desconhecidos dos dois lados da balança. Uma solução simples para esse problema seria retirar um pacote de cada lado; uma vez que os pacotes eram iguais, a balança deveria permanecer equilibrada. Depois de retirado um pacote de cada lado, teríamos de um lado o peso de 750 gramas e do outro lado o peso de meio quilo mais um pacote. A subtração da mesma quantidade dos dois lados da balança simplifica o problema e permite sua solução, mas requer que o feirante reconheça que é possível subtrair essas quantidades desconhecidas, e concluir que a balança permanece em equilíbrio porque as quantidades são iguais. Operar com incógnitas é um passo difícil para os alunos, e não foi muito simples nem mesmo para os feirantes, embora tivessem muita experiência com a balança de dois pratos. A maioria resolveu esse tipo de problema, principalmente após uma pista que os auxiliava a pensar um pouco mais. Mas devemos observar que o problema só faz sentido se a pessoa compreende as relações entre quantidades numa balança de dois pratos, o que reforça a ideia de que a compreensão das relações entre quantidades numa situação é funda-

mental para sua modelagem. Se a pessoa não sabe como a balança funciona, a operação com incógnitas não é possível.

Teria sido extremamente interessante investigar como os jovens e adultos que aprendem a Matemática na prática representam os modelos que usam, seja por meio de diagramas, seja por meio de letras em combinação com operações, como fazemos em Álgebra. Como seria a representação das relações parte-todo feita por nossos informantes nesses estudos se tivéssemos solicitado que nos explicassem seu raciocínio com diagramas? Como eles demonstrariam a diferença entre dois problemas, um envolvendo relações parte-todo e outro envolvendo correspondências? Não realizamos projetos que investigassem sistematicamente as representações usadas por informantes que aprenderam a Matemática na prática. Focalizamos apenas a solução oferecida oralmente. Essa lacuna talvez mereça ser preenchida, pois seria muito útil entender os processos envolvidos na representação de saberes matemáticos construídos na prática. A construção de representações é parte integral do conhecimento matemático e talvez nos ajudasse a compreender as ligações entre modelagem e a resolução de problemas usando representação algébrica.

Nos últimos anos, David e Analúcia desenvolveram várias análises sobre a relevância da Matemática aprendida fora da escola para a Matemática da sala de aula (Carraher & Schliemann, 2002; Schliemann & Carraher, 2002; Carraher, 2008) e realizaram uma série de estudos longitudinais em sala de aula que mostram como crianças de 8 a 11 anos de idade podem ser introduzidas aos princípios e à representação algébrica (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007 e 2011; Carraher & Schliemann, 2007; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; [earlyalgebra.org](http://earlyalgebra.org)). As situações de aprendizagem propostas nesses estudos, especialmente planejadas para provocar a emergência de conceitos e representações matemáticas, foram inspiradas na forma como crianças aprendem matemática fora da escola.<sup>2</sup> O leitor interessado pode buscar maiores informações nos trabalhos citados aqui.

---

2. Essas informações foram fornecidas diretamente por David e Analúcia.

## Comentários finais

Os estudos relatados neste livro são reconhecidos internacionalmente por oferecer contribuições significativas à pesquisa nos campos da Psicologia do Desenvolvimento (ver Cole & Cole, 2001), no estudo das relações entre cognição e cultura (ver Segall, Dasen, Berry & Poor-tinga, 1999) e em Educação Matemática (ver Carpenter, Dosey & Koeler, 2004; Bishop, 2010). Esse reconhecimento nos gratifica e nos possibilita continuar investigando o desenvolvimento da criança e de seu conhecimento matemático até hoje. Ao fazer esse balanço do impacto dos estudos apresentados em *Na vida dez, na escola zero*, lembrei-me com saudades de todos os amigos e colaboradores com quem trabalhei em Recife. Embora os nomes de alunos e colegas que trabalharam diretamente nos estudos relatados neste livro apareçam nas notas de rodapé, e outros nomes como os de Tânia Campos, Lúcia Browne, Lair Levi Buarque, Maurício Figueiredo Lima, Zélia Higino, Edvirges Ruiz e muitos outros não tenham sido citados porque não trabalharam diretamente nesses estudos, fica registrado nesta Apresentação que todos são muito mais do que notas ao pé de página em minha vida. Seu estímulo e amizade foram sempre importantes durante os catorze anos em que trabalhei na UFPE.

*Terezinha Nunes*

Oxford, 16 de maio de 2011

## Bibliografia

BISHOP, A. J. *Mathematics Education*. London: Routledge, 2010. v. 3.

BRYANT, P.; NUNES, T. Key Understandings in Mathematics Learning. *Paper 2*. Understanding whole numbers, 2009. Disponível em: <<http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P2.pdf>>.

CARPENTER, T. C.; DOSSEY, J. A.; KOELER, J. L. *Classics in Mathematics Education Research*. Reston: National Council of Mathematics Teachers, 2004.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and Algebraic Reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). *Handbook of Research in Mathematics Education*. Greenwich: Information Age Publishing, 2007. p. 669-705.

\_\_\_\_\_. Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? In: MOSHKOVICH, J.; BRENNER, M. (Eds.). *Everyday Mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 131-153, 2002.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). *Algebra in the Early Grades*. Mahwah: Erlbaum, 2008. p. 235-72.

COLE, M.; COLE, S. R. *The development of children*. 4. ed. New York: Worth Publishers, 2001.

DEVLIN, K. Multiplication and those pesky British spellings, 2009. Disponível em: <[http://www.maa.org/devlin/devlin\\_09\\_08.html](http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html)>.

FISCHBEIN, E. *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel, 1987.

FISCHBEIN, E. et al. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17, 1985.

GRAEBER, A.; TIROSH, D. Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' performance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 263-80, 1988.

GRAVEMEIJER, K. Context problems and realistic mathematics instruction. In: GRAVEMEIJER, K.; HEUVEL, M. van den; STREEFLAND, L. (Eds.). *Context free production tests and geometry in realistic mathematics education*. Utrecht: Research Group for mathematical Education and Educational Computer Centre, State University of Utrecht, 1990. p. 10-32.

\_\_\_\_\_. Mediating between concrete and abstract. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds.). *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*. Hove: Psychology Press, 1997. p. 315-46.

HAREL, G.; CONFREY, J. *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany New York: State University of New York Press, 1994.

HUGHES, M. Can preschool children add and subtract? *Educational Psychology*, 3, 207-19, 1981.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell, 1996.

\_\_\_\_\_. Insights from everyday knowledge for mathematics education. In: PREISS, D.; STERNBERG, R. (Eds.). *Innovations in Educational Psychology*. New York: Springer, 2010. p. 51-78.

NUNES, T.; BRYANT, P.; WATSON, A. Key Understandings in Mathematics Learning. Paper 1: Overview, 2009. Disponível em: <<http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P1.pdf>>.

NUNES, T. et al. The scheme of correspondence and its role in children's mathematics. *British Journal of Educational Psychology — Monograph Series II, Number 7 — Understanding number development and difficulties*, 83-99, 2010.

NUNES, T. et al. Teaching children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*, 2011 (in press).

PIAGET, J. *The Child's Conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul, 1952.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. The Evolution of Mathematical Understanding: Everyday Versus Idealized Reasoning. *Developmental Review*, 22(2), 242-66, 2002.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

\_\_\_\_\_. *El carácter algebraico de la Aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós, 2011.

SEGALL, M. H. et al. *Human Behavior in Global Perspective. An Introduction to Cross-cultural Psychology*. Boston: Allyn and Bacon, 1999.

STREEFLAND, L. Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards... A Theory): Part II: The Outline of the Long Term Learning Process. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 75-94, 1985.

\_\_\_\_\_. Charming fractions or fractions being charmed? In: Nunes, T.; Bryant, P. (Eds.). *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*. Hove: Psychology Press, 1997. p. 347-72.

THOMPSON, P. W. Quantitative Reasoning, Complexity, and Additive Structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 165-208, 1993.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52, 83-94, 2009.

## *Capítulo 1*

### **A matemática na vida cotidiana: psicologia, matemática e educação**

Nos corredores da ciência, psicologia, matemática e educação são disciplinas diferentes, de lugares diferentes: ciências humanas, ciências exatas e ciências sociais aplicadas. Pode-se até esquecer que existem ligações entre essas três disciplinas. Na prática, porém, existem fenômenos em que essas disciplinas não estão dissociadas. Quando uma criança resolve um problema com números na rua, usando seus próprios métodos, mas que são métodos compartilhados por outras crianças e adultos, estamos diante de um fenômeno que envolve matemática, devido ao conteúdo do problema, psicologia, porque a criança certamente raciocinou, e educação, porque queremos saber como ela aprendeu a resolver problemas desse jeito. Podemos separar a matemática da psicologia do pensamento enquanto ciências, mas não podemos separá-las enquanto fenômenos acontecendo na prática. Quando alguém resolve um problema de matemática, estamos diante de uma pessoa que pensa. A matemática que um sujeito produz não é independente de seu pensamento enquanto ele a produz, mas pode vir a ser cristalizada e tornar-se parte de uma ciência, a matemática, ensinada na escola e aprendida dentro e fora da escola.

## Matemática como ciência e como atividade humana

Ao nível da comunidade científica, a matemática é definida como uma ciência formal. Isto significa que a lógica reconstruída (ver Kaplan, 1969) da matemática é dedutiva. Demonstrações por indução não são reconhecidas pela comunidade científica — não porque não possam existir em outras ciências, mas porque não são aceitas como demonstrações de valor na matemática. Se alguém quisesse provar, por exemplo, que todo número da forma  $ABC.ABC$  (como 435.435; 176.176 etc.) é divisível por 13 tomando centenas de números da forma  $ABC.ABC$ , dividindo-os por 13 e mostrando que não há resto nestas divisões, nenhum matemático aceitaria esse exercício como uma prova. Ao nível de sua organização como ciência, na matemática somente são aceitáveis provas por dedução. No entanto, a matemática não é apenas uma ciência: é também uma forma de atividade humana. Ao nível da atividade humana, a construção da matemática não é realizada necessariamente pelas “leis” da lógica. Uma descoberta em matemática pode, na verdade, ocorrer por indução, sendo o processo de prova posterior. A prova teria, para o indivíduo neste caso, não uma função de criação de novos conhecimentos, mas de demonstração de algo já descoberto; para a comunidade científica, no entanto, a prova mereceria o *status* de “novidade” ou “descoberta”.

A aprendizagem de matemática na sala de aula é um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal, e a matemática como atividade humana. Em primeiro lugar, não devemos nos esquecer de que o professor é uma pessoa, que organiza, ele próprio, sua atividade matemática. Mesmo que uma pessoa seja cientificamente treinada, sua atividade não segue necessariamente as formas dedutivas aprovadas pela comunidade científica. Em segundo lugar, mas não secundariamente, a matemática praticada na sala de aula é uma atividade humana porque o que interessa nessa situação é a aprendizagem do aluno. A aprendizagem de um conceito — quer de matemática, quer de física, quer de literatura — está relacionada à psicologia da aprendizagem em primeiro plano. A atividade que conduz à aprendizagem é a atividade de um sujeito humano construindo seu

conhecimento. Ainda que a matemática formal proíba demonstrações por processos indutivos, a aprendizagem de conceitos matemáticos pode exigir a observação de eventos no mundo.

Enquanto atividade humana, a matemática é uma forma particular de organizarmos os objetos e eventos no mundo. Podemos estabelecer relações entre os objetos de nosso conhecimento, contá-los, medi-los, somá-los, dividi-los etc. e verificar os resultados das diferentes formas de organização que escolhemos para nossas atividades. Por exemplo, se tivermos diante de nós a tarefa de distribuir iguais quantidades do feijão obtido após uma colheita para 30 famílias, podemos contar grão por grão, dividir o número de grãos por 30, e depois contar, para cada família, o número de grãos que lhe cabe. Mas, ao tentarmos executar essa tarefa, logo descobriremos que essa solução é absurda, embora fosse uma solução matematicamente correta. A organização dessa atividade requer um caminho mais eficiente. Podemos encher uma lata de feijão para cada família, distribuir várias latas até que não se possa mais fazer uma distribuição equitativa com latas maiores, e então mudar para latas menores para a divisão final. Se tivermos uma balança, podemos pesar as quantidades e proceder analogamente. A organização da divisão de uma quantidade em partes iguais é uma atividade de natureza matemática, envolve conceitos matemáticos. Mas não é totalmente idêntica à matemática: há aqui um processo de decisão que está relacionado ao que se deseja conseguir. A contagem dos grãos é um processo perfeitamente correto do ponto de vista matemático, mas inapropriado do ponto de vista da tarefa que se deseja realizar. A mensuração com latas não é um processo reconhecido na escola, onde só lidamos com medidas convencionais, mas representa uma solução adequada, que supõe os mesmos conceitos matemáticos usados se falássemos em litros.

## Matemática e psicologia: teoria e método

Piaget foi, dentre os estudiosos da psicologia, quem mais contribuiu para que viéssemos a reconhecer que a lógica e a matemática podem ser

tratadas como formas de organização da atividade intelectual humana. Seus estudos incentivam os pesquisadores interessados na análise do raciocínio a tentarem explicitar os conhecimentos lógico-matemáticos implícitos quando resolvemos problemas de determinadas maneiras. Piaget aponta, por exemplo, o fato de que o bebê que tenta pegar um objeto que está escondido por um anteparo deve ter organizado uma compreensão do espaço que envolve relações como “na frente” e “atrás”. Senão, o bebê, ao ver o objeto desaparecer, não saberia onde procurá-lo. Portanto, a partir de seu comportamento, podemos fazer inferências sobre a organização que o bebê dá a sua atividade no espaço; esta organização estaria implícita à atividade. Ao dar a volta em torno de um obstáculo para pegar um objeto, engatinhando inicialmente na direção oposta ao objeto para poder contornar o obstáculo, o bebê só pode estar utilizando um teorema-em-ação (na terminologia de Vergnaud, 1985) que afirma que um movimento AB pode ser invertido por um movimento BA — ou seja, que um movimento AB + um movimento BA é igual a zero. A proposta piagetiana de analisar a organização das ações e explicitar as estruturas lógico-matemáticas implícitas teve grande impacto na psicologia cognitiva.

Nos estudos de Genebra, esta proposta de análise foi explorada em detalhes em tarefas criadas experimentalmente e, frequentemente, baseadas em experiências de interesse histórico nas ciências exatas. A grande produção do Centro de Epistemologia Genética relativa à compreensão de conceitos lógico-matemáticos e científicos passou a inspirar educadores em suas tentativas de construir ambientes educacionais mais propícios à reflexão e ao desenvolvimento conceitual. A contribuição desses estudos para a educação é inegável.

No entanto, uma grande lacuna permaneceu. A proposta piagetiana envolve a noção de que é o próprio sujeito que organiza sua atividade e consegue, por meio da evolução dessa organização, chegar a mudanças que chamamos de “desenvolvimento do pensamento”. Piaget propõe, então, a necessidade de sabermos como o desenvolvimento das estruturas lógico-matemáticas ocorre também fora da escola, considerando, ele próprio, como simples hipótese (ver Piaget, 1966) sua des-

criação do desenvolvimento cognitivo por estar baseada apenas em uma cultura e, ainda assim, restrita ao estudo de sujeitos escolarizados de uma forma particular. Piaget não espera que a escola seja o único ambiente responsável pelo desenvolvimento intelectual, mas reconheceu (1972) que seus estudos sobre o desenvolvimento da lógica da criança e do adolescente (Inhelder e Piaget, 1955) estavam limitados a tarefas estreitamente relacionadas ao ambiente escolar, com ênfase nos problemas que fazem parte do ensino de ciências.

## Os estudos desta coletânea

A proposta piagetiana de encontrar as formas de organização de natureza lógico-matemática subjacentes à atividade da criança foi expandida aqui para a investigação das atividades cotidianas fora e dentro da escola em vários estudos. Uma compra ou venda numa feira, uma interpretação de uma planta numa construção, um cálculo de material para a construção de um móvel são atividades cotidianas cuja organização envolve conhecimentos lógico-matemáticos nem sempre explícitos — embora frequentemente as condições de interação social sejam tais que esses conhecimentos chegam mesmo a ser explicitados. A mesma ideia central da teoria piagetiana é adotada nesses estudos, ou seja, a ideia de que é possível encontrar na organização da ação elementos que nos indicam que estruturas lógico-matemáticas estão implicadas na própria ação dos sujeitos.

Também é adotada a mesma abordagem metodológica geral, uma metodologia hoje conhecida como o “método clínico-piagetiano” (Carraher, 1988), que envolve a apresentação de problemas cuidadosamente selecionados aos sujeitos de modo não padronizado, mas, ao mesmo tempo, não casual. O investigador procura descobrir, através da obtenção de justificativas e da apresentação de novos problemas, que formas de raciocínio o sujeito está utilizando. Apesar do fato de que todos os sujeitos participando de um mesmo estudo são entrevistados sobre uma única questão, eles não são entrevistados com base em um roteiro in-

flexível, apresentado sempre da mesma maneira, mas são questionados de modo a tentarmos seguir seu raciocínio, explorando-se as hipóteses sobre este raciocínio pela apresentação de novos problemas cuidadosamente selecionados.

Nos estudos apresentados aqui, o método clínico-piagetiano foi, por vezes, associado a descrições etnográficas e ao método experimental. Algumas formas de controle (por exemplo, na ordem de apresentação de problemas, nos dígitos escolhidos) ou de seleção intencional de sujeitos são introduzidas para a melhor avaliação de determinadas hipóteses. Estas associações entre diferentes métodos permitem obter dados mais claramente interpretáveis em muitas circunstâncias e refletem a interdisciplinaridade das questões abordadas nestes estudos.

No entanto, as situações que analisamos não são como as tarefas piagetianas clássicas (conservação, inclusão de classes, seriação etc.) por várias razões. Primeiro, nas tarefas piagetianas clássicas o examinador procura levar o sujeito a *explicitar* certos princípios básicos do raciocínio, considerados por Piaget como essenciais aos conceitos lógico-matemáticos que ele estudou. Por exemplo, os estudos de conservação, inclusão de classes e seriação procuram explicitar princípios que, segundo Piaget, seriam básicos à compreensão de número. Os estudos desta coletânea não levam os sujeitos a uma explicitação das propriedades e modelos matemáticos conhecidos pelos sujeitos; tratam esse conhecimento lógico-matemático como “teoremas em ação” (Vergnaud, 1985) — ou seja, como *conhecimentos implícitos* na organização que o sujeito faz de suas ações ao buscar soluções para problemas. Essa diferença de objetivos tem consequências importantes para o tipo de dados que coletamos, resultando numa segunda diferença entre os estudos da matemática em seus contextos culturais e as tarefas piagetianas. Enquanto nas tarefas piagetianas clássicas os princípios lógico-matemáticos são *objeto* das entrevistas com as crianças e adolescentes, em nossos estudos eles são *instrumentos* para solução de problemas. Ora, sabemos que é extremamente difícil, mesmo para adultos, explicitar muitos conhecimentos que possuem implicitamente. O caso mais

amplamente discutido na literatura com relação a essa questão é a linguagem: enquanto falamos uma língua, usamos noções gramaticais implícitas na organização de nossa produção linguística, as quais não temos condição de explicitar. Uma terceira diferença consiste exatamente na exploração mais detalhada desses contextos culturais e sua repercussão sobre a organização das ações do sujeito. Quando uma ação é organizada para um determinado fim por estar inserida numa situação específica, o significado da situação e a finalidade podem ter impacto sobre a própria organização da ação. Já discutimos anteriormente como soluções matemáticas corretas para um problema podem ser impróprias para a vida. Finalmente, sabemos que as situações em que os problemas são resolvidos e as finalidades na resolução de problemas têm impacto sobre a representação que fazemos da solução a partir de nossa própria estratégia de resolução de problemas. Certas representações podem levar o sujeito a perceber melhor os princípios matemáticos do que outras. Por exemplo, quando um feirante passa um troco na feira, a fim de evitar erros e mostrar que está dando o troco certo, ele geralmente soma os valores das notas que entrega ao freguês ao valor de sua compra. Se o total da compra foi 270 cruzeiros e o freguês pagou com uma nota de 500, o feirante vai entregando as notas e dizendo: 270, 280, 290, 300, 400, 500. Seria essa estratégia de resolução, em que o troco é somado ao valor da compra, equivalente à representação de problemas de troco na aritmética escolar, em que o valor da compra deve ser subtraído do valor da nota? A relação entre a compreensão dos princípios e modelos lógico-matemáticos subjacentes à resolução de problemas em diferentes contextos culturais e sua representação nesses contextos é uma preocupação fundamental dos estudos desta coletânea — preocupação que não teve lugar nos estudos piagetianos clássicos mesmo quando as mesmas estruturas lógico-matemáticas foram analisadas.

Os Capítulos 2 a 7 representam estudos específicos de atividades relacionadas à matemática avaliadas com respeito às aprendizagens dentro e fora da escola. Estes estudos foram realizados no decorrer de

cinco anos de pesquisa mas foram preservados em sua forma original. Estão apresentados aproximadamente em ordem cronológica, porque um novo estudo foi, frequentemente, concebido para investigar questões e críticas abertas pelo estudo anterior. O que unifica o trabalho é a abordagem teórica e metodológica consistente, embora novas reflexões específicas tenham amadurecido tanto a teoria como a metodologia do primeiro para os últimos trabalhos. O capítulo final constitui uma tentativa de resumir, de nosso próprio ponto de vista, as conclusões e implicações atuais desses estudos. Essa tentativa utiliza uma teorização mais específica do que a abordagem geral subjacente a todos os trabalhos, procurando retomar alguns exemplos e unificar as conclusões parciais em um quadro mais geral.

Os estudos que apresentamos aqui levantam questões para diferentes áreas da ciência. Sem querer explorar todas elas, discutiremos as questões que julgamos de interesse para a psicologia, a educação e o ensino de matemática.

## Questões psicológicas provocadas por estes estudos

A divisão de trabalho entre a Psicologia e a Antropologia, como já foi apontado por Cole (1984), é uma divisão que tem origens interessantes e que precisa ser revista hoje à luz de novas teorias e métodos. A Psicologia, ao separar-se da Filosofia, definindo-se como ciência experimental, localizou seu campo de estudos no laboratório. Seu objeto de estudo, o homem europeu e norte-americano, também vivia fora do laboratório, mas o que ocorria fora do laboratório, mesmo que pertencente ao campo da psicologia, ficava ignorado. A antropologia, por outro lado, interessava-se pelo estudo de culturas não europeias, diferentes das culturas dos colonizadores. Por trás dessa divisão de trabalho entre a psicologia e a antropologia, havia preconceitos, que hoje não têm mais a mesma aceitação. A antropologia hoje foi trazida de volta para casa; as etnografias são estudos antropológicos feitos, muitas vezes,

dentro das culturas que antes não eram objeto de estudos antropológicos. E, simultaneamente, a psicologia de hoje não precisa restringir-se ao laboratório para ser científica; interessa à psicologia hoje tanto a relevância de suas teorias para o que ocorre fora do laboratório, como a manutenção de seu *status* científico, e esses dois objetivos não podem ser vistos como incompatíveis.

Os estudos relatados nesta coletânea levantam questões psicológicas de grande interesse. Se partirmos do ponto de vista de que a atividade humana é organizada e aceitarmos a noção piagetiana de que as estruturas lógico-matemáticas podem ser concebidas como as principais formas desta organização, temos ainda muitas questões não esclarecidas. Por exemplo, em que medida a situação social influencia a organização da atividade? Na escola, a matemática é uma ciência, ensinada em um momento definido por alguém de maior competência. Na vida, a matemática é parte da atividade de um sujeito que compra, que vende, que mede e encomenda peças de madeira, que constrói paredes, que faz o jogo na esquina. Que diferença fazem essas circunstâncias para a atividade dos sujeitos? Na aula de matemática, as crianças fazem conta para acertar, para ganhar boas notas, para agradar a professora, para passar de ano. Na vida cotidiana, fazem as mesmas contas para pagar, dar troco, convencer o freguês de que seu preço é razoável. Estarão usando a mesma matemática? O desempenho nas diferentes situações será o mesmo? Que papel exerce a motivação da venda? Que explicação existe para que alguém seja capaz de resolver um problema em uma situação e não em outra?

Mas há ainda muitas outras questões. Na prática diária, lidamos com muitos sistemas convencionais — o sistema de numeração, o dinheiro (que é um sistema de representação de valores), as medidas (de peso, de comprimento etc.). Que influência teria a adoção desses sistemas convencionais, culturalmente desenvolvidos, sobre o pensamento lógico-matemático? Em seus *Estudos sociológicos*, Piaget (1973) menciona a questão da relação entre a história da ciência e o desenvolvimento conceitual do adolescente hoje, lembrando-nos de que o que

Mendel demorou anos para descobrir com suas pesquisas pode ser aprendido em algumas semanas por um adolescente hoje. Mas o exemplo não resolve o problema; apenas o coloca em evidência. Que relação existe entre o desenvolvimento intelectual e o momento histórico em que vive o aluno? E, certamente, ao falarmos em momento histórico, não vamos ignorar que o momento não é igual para todos. Que relação existe entre as circunstâncias de vida — socioeconômicas e culturais — e o desenvolvimento do pensamento? Embora a resposta frequentemente pareça óbvia para nossos interlocutores, temos a oportunidade de conversar com pessoas que encontram respostas óbvias opostas para esta questão. Alguns acham que as crianças pobres sabem mais matemática, porque têm a prática, porque lidam com dinheiro, porque dela precisam para sobreviver, enquanto outros acham que a criança pobre sabe menos matemática, porque é desnutrida, porque vem de ambientes culturalmente desfavorecidos, porque apenas aprende na prática a lidar com o concreto e matemática envolve abstrações. Quando duas respostas opostas parecem óbvias, temos diante de nós um problema interessante a ser pesquisado. Os estudos que seguem procuram respostas menos óbvias para essas questões.

## Questões para a educação

As questões psicológicas apontadas acima são teóricas. No entanto, suas implicações educacionais são quase imediatas. O que fazer na escola se constatamos que as crianças sabem mais matemática fora da sala de aula? O que ensinar na escola se as crianças já aprendem muito fora da sala de aula? Que postura deve ter o professor, que motivações deve buscar para sua aula, que contratos pedagógicos deve fazer se ficar constatado que as relações interpessoais influenciam até mesmo a utilização de estruturas lógico-matemáticas, que pareciam tão imunes às influências sociais, por fazerem parte das ciências exatas?

Quando uma solução matemática é negociada na rua — numa venda na feira, numa aposta no jogo do bicho — ela reflete os rituais

da cultura para a situação, não apenas as estruturas matemáticas subjacentes. Mas como é que os indivíduos aprendem esses rituais, cheios de lógica e matemática, sem os benefícios da instrução sistemática ministrada por um professor especialmente preparado para tal fim? E que explicações teremos para o fracasso da criança em sala de aula se ela for bem-sucedida nas tarefas cotidianas que envolvem estruturas lógico-matemáticas?

O processo de explicação do fracasso escolar tem sido uma busca de culpados — o aluno, que não tem capacidade; o professor, que é mal preparado; as secretarias de educação, que não remuneram seus professores; as universidades, que não formam bem o professor; o estudante universitário, que não aprendeu no secundário o que deveria ter aprendido e agora não consegue aprender o que seus professores universitários lhe ensinam. Mas a criança que aprende matemática na rua, o cambista analfabeto que recolhe apostas, o mestre de obras treinado por seu pai, todos eles são exemplos vivos de que nossas análises estão incompletas, precisam ser desafiadas, precisam ser desmanchadas e refeitas, se quisermos criar a verdadeira escola aberta a todos, pública e gratuita, pela qual lutamos nas praças públicas. Os educadores, todos nós, precisamos não encontrar os culpados mas encontrar as formas eficientes de ensino e aprendizagem em nossa sociedade.

## Questões para o ensino de matemática

A psicologia pode tirar dos estudos narrados nesta obra lições para as teorias do desenvolvimento cognitivo e para as teorias de aprendizagem. A educação pode buscar implicações destas teorias para o ensino em geral. Mas o ensino de matemática deveria ser, sem dúvida, a área mais diretamente beneficiada pelo conhecimento da matemática da vida cotidiana. Na sala de aula, a professora que ensina matemática não poderá distinguir a matemática formal da matemática enquanto atividade humana. Seus alunos estarão sempre realizando atividades que envolvem concepções lógico-matemáticas em uma situação particular

— a sala de aula —, cujas características podemos conhecer melhor após esses estudos.

O ensino de matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem. Apesar de todos reconhecermos que os alunos podem aprender sem que o façam na sala de aula, tratamos nossos alunos como se nada soubessem sobre tópicos ainda não ensinados. Os estudos narrados aqui nos mostram tantas situações em que aprendemos matemática fora da sala de aula que a professora de matemática poderá, a partir deles, ficar mais atenta para as situações diárias em que a matemática intervém. Mas não é só isso; alguns desses estudos “analisam” certas regras, mostrando seus componentes, suas inconsistências quando elas são colocadas num quadro mais amplo, e a perda de significado das atividades matemáticas realizadas na sala de aula.

Esses estudos mostram que um problema não perde o significado para a criança porque usa uva em vez de pitomba ou pitomba em vez de uva como a fruta do exemplo. O problema perde o significado porque a resolução de problemas na escola tem objetivos que diferem daqueles que nos movem para resolver problemas de matemática fora da sala de aula. Perde o significado também porque na sala de aula não estamos preocupados com situações particulares, mas com regras gerais, que tendem a esvaziar o significado das situações. Perde o significado também porque o que interessa à professora não é o esforço de resolução do problema por um aluno mas a aplicação de uma fórmula, de um algoritmo, de uma operação, predeterminados pelo capítulo em que o problema se insere ou pela série escolar que a criança frequenta. Muitos desses pontos podem ser considerados a partir dos estudos discutidos neste volume. Muitos outros serão aprofundados em um volume posterior, que examina em detalhes as relações entre conhecimento escolar e conhecimento extraescolar da matemática, apresentando nossas sugestões de como usar o conhecimento extraescolar na sala de aula. No entanto, os estudos descritos aqui devem provocar cada professor a buscar maneiras de usar em sala de aula o conhecimento matemático cotidiano de seus alunos; esse desafio, se aceito de fato, pode revolucionar e, principalmente, tornar muito mais fascinante a aprendizagem da matemática.

## Bibliografia

CARRAHER, T. N. *O método clínico: usando os exames de Piaget*. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 1988.

COLE, M. Psicologia e antropologia. Conferência proferida no Simpósio “Literacy and Psychology”, Medical Research Center, Applied Psychology Unit, Cambridge, UK, junho de 1984.

INHELDER, B.; PIAGET, J. *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

KAPLAN, A. *A conduta na pesquisa: metodologia para as ciências do comportamento*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1969.

PIAGET, J. Nécessité e signification des recherches comparatives en psychologie. *Journal International de Psychology*, v. 1, n. 1, 1966.

\_\_\_\_\_. *Estudos sociológicos*. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

\_\_\_\_\_. Intellectual evolution from adolescent to adulthood. *Human Development*, n. 15, p. 1-12, 1972.

VERGNAUD, G. Concepts et schémas dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychology Française*, v. 30, n. 3-4, p. 245-52, 1985.